ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 9 **Dezember 1929** **Heft 6**

Inhalt:

	Seite
An unsere Leser und Mitarbeiter	433
Hauptaufsätze. F. Éliás: Die Wärmeübertragung einer geheizten Platte an strömende Luft	434
K. Huber: Versuche zur Ermittlung der Vertikalspannungen beim Walzvorgang	454
W. Spannhake und W. Barth: Potentialströmung durch ruhende oder bewegte Schaufelgitter mit Schaufeln von beliebiger Form	466
Vorträge der Prager Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik, von L. Föppl, M. Sadowsky, E. Schwerin, H. Reißner, K. Karas, G. Zerkowitz, P. Neményi, H. Schmidt, H. G. Küssner, K. Friedrichs, Th. Troller, J. Nikuradse, A. Busemann, J. Lotz, R. Iglisch, W. Sternberg, E. Tornier, F. Bernstein, A. Basch, M. Herzberger, W. Müller, K. Uller, F. Weinig, F. Noether	480
Kurze Auszüge. Elastizität und Festigkeit	510
Kleine Mitteilungen. Westergaard: Graphische Auflösung eines linearen Gleichungssystems	513
Buchbesprechungen. Eisenhart: Non-Riemannian Geometry. — Bell: Algebraic Arithmetic. — Neugebauer: Astronomische Chronologie. — Lichtenstein: Grundlagen der Hydromechanik. — Schmidt: Aerodynamik des Fluges. — Oberth: Wege zur Raumschiffahrt. — Glauert: Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. — Preußische Staatsbibliothek: Mathematik und Naturwissenschaften. — Hatschek: Die Viskosität der Flüssigkeiten. — Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart. — Weiter eingegangene Bücher	515
Nachrichten	519

An unsere Leser und Mitarbeiter!

Mit dem nächsten Heft tritt unsere Zeitschrift in das zehnte Jahr ihres Bestandes. In dieser kurzen Zeit hat sie sich unbestrittenes und wohlbegründetes Ansehen in allen wissenschaftlichen Kreisen des In- und Auslandes erworben.

Der ständig wachsende Zugang an Beiträgen, die der Veröffentlichung wert schienen, veranlaßte die Schriftleitung schon vor längerer Zeit, beim Verlag eine Vermehrung des Umfangs zu beantragen. Der Verlag hat in dankenswerter Weise dem zugestimmt, so daß vom neuen Jahrgang ab der Band 40 Druckbogen an Stelle von 32 umfassen wird. Der Bezugspreis ist dabei nur im Verhältnis der Umfangssteigerung erhöht worden (jetziger Preis Mk. 30.— jährlich); dies wird, wie wir hoffen, die Billigung der Abnehmer finden.

An dem Programm der Zeitschrift, an der Stoffabgrenzung und an dem wissenschaftlichen Niveau der Beiträge wird nichts geändert. Nach wie vor soll jedes wesentliche Forschungsergebnis auf dem Gebiete der Mechanik, der Wärme-, der Elektrizitätslehre, der Statistik usf., das aus wissenschaftlicher Vertiefung in den Gegenstand hervorgegangen ist und für den Fortschritt der Technik nutzbringend zu sein scheint, Aufnahme finden. Einen Unterschied zwischen experimentellen und sog. rein theoretischen Arbeiten machen wir nicht, so wenig wie irgendeine physikalische Zeitschrift ihn kennt. Denn jede theoretische Untersuchung beruht in letzter Linie auf einer bestimmten Erfahrungsgrundlage und keine Beobachtungsreihe ist von Wert, wenn sie nicht von theoretischen Gesichtspunkten geleitet wird. Wir wiederholen den Satz aus unserm an der Spitze des dritten Bandes veröffentlichten Programm: „Einen Zerfall der Ingenieurwissenschaften in einen experimentellen und einen theoretischen Teil halten wir für schädlich, und es soll gerade ein Ziel unserer Zeitschrift sein, dem entgegenzuwirken."

Berlin, im Dezember 1929. *Der Herausgeber.*

HAUPTAUFSÄTZE

Die Wärmeübertragung einer geheizten Platte an strömende Luft.

I. Anlage und Ergebnisse der Versuche.

Von **FRANZ ÉLIÁS** in Berlin.

(Aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule in Aachen.)

1. Einleitung. Die neuesten Ergebnisse der theoretischen und der experimentellen Hydrodynamik haben zu der Erkenntnis geführt, daß die für die Reibung und die Wärmeübertragung maßgebenden Strömungsvorgänge in Flüssigkeiten und in Gasen entlang fester Körper sich nur auf eine ziemlich dünne Schicht, die »hydrodynamische Grenzschicht«, beschränken. Durch diese Fortschritte wurde zunächst die Erkenntnis der Reibungsvorgänge strömender Flüssigkeiten und Gase gefördert[1]). Durch weiteren Ausbau der gefundenen Ergebnisse wurden die grundlegenden Erscheinungen der Wärmeübertragung bei Strömungsvorgängen klargelegt.

Abb. 1.

Die Wärmeübertragung in strömenden Flüssigkeiten erfolgt durch Wärmeleitung und durch Wärmekonvektion. Da die Flüssigkeit an der Wand haftet, so muß die Wärme zwischen dieser Schicht und dem festen Körper analog wie zwischen zwei festen Körpern durch Wärmeleitung übergehen. Diese Annahme bestätigt der Umstand, daß an der Trennnungsfläche einer Flüssigkeit und eines festen Körpers genau so wie zwischen zwei festen Körpern kein Temperatursprung stattfindet[2]). Auch bei der Wärmeausbreitung in Flüssigkeiten handelt es sich um eine Art Wärmeleitung. Man unterscheidet in der physikalischen Vorstellung und in der mathematischen Formulierung eine Wärmeleitung durch molekularen Wärmetransport und eine Wärmeübertragung durch »molare« Bewegung.

Bei der laminaren Strömung ist eine Wärmeleitung durch die ungeordnete Molekularbewegung und eine Wärmeübertragung durch die geordnete Strömung entlang der Grenzschicht vorhanden. Bei turbulenter Strömung wird eine erhöhte Wärmeübertragung durch die auftretenden Schwankungsbewegungen in der Flüssigkeit verursacht, in der auch molare Teile als Wärmeträger mitwirken. Die molekulare Wärmeleitung und die Wärmekonvektion durch die Schwankungsbewegung kann man zusammengefaßt als »tur-

[1]) L. Prandtl, Verh. d. 3. Intern. Math. Kongr. in Heidelberg 1904, S. 484, Leipzig 1905.
Th. v. Kármán, Ueber laminare und turbulente Reibung, Abh. d. Aerodyn. Inst. d. Techn. Hochschule Aachen, Heft 1, S. 1, siehe auch diese Zeitschr., 1921, S. 233.

[2]) W. Nußelt, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. Habilitationsschrift Dresden. Berlin 1909. S. 3.

bulente Wärmeleitung« bezeichnen. Eine unmittelbare Berechnung der turbulenten Wärmeleitung ist nicht möglich, da wir den Mechanismus der Schwankungsbewegung nicht kennen. Man kann indessen aus dem Maß der Reibung auf das Maß der Wärmeübertragung schließen, indem man annimmt, daß der zugrunde liegende Mechanismus der Impulsübertragung im ersten Fall der Wärmeübertragung im zweiten Falle identisch ist.

Reynolds[1]) hat auf dieser Grundlage aus der Widerstandszahl glatter Rohre auf die Wärmeübergangszahl geschlossen. Prandtl[2]) hat, angeregt durch die Ergebnisse der Nußeltschen Arbeit (s. o.), gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen ein direkter Analogieschluß vom Strömungswiderstand auf die Wärmeübertragung bei turbulenter Strömung erlaubt ist. v. Kármán[3]) hat die von Prandtl und ihm selbst entwickelten halbempirischen Ansätze für die turbulente Reibung in das Problem eingeführt und so Differentialgleichungen für die turbulente Wärmeleitung aufgestellt. Auf Grund dieses Ansatzes ist es möglich, die Wärmeübertragung in allen Fällen zu rechnen, in denen das Geschwindigkeitsfeld der turbulenten Strömung bekannt ist. Mit Hilfe des von v. Kármán aufgestellten Ansatzes hat einer seiner Schüler, H. Latzko[4]), die turbulente Wärmeübertragung an einer Flüssigkeit errechnet, die durch ein Kreisrohr oder an einer ebenen Platte vorbeiströmt.

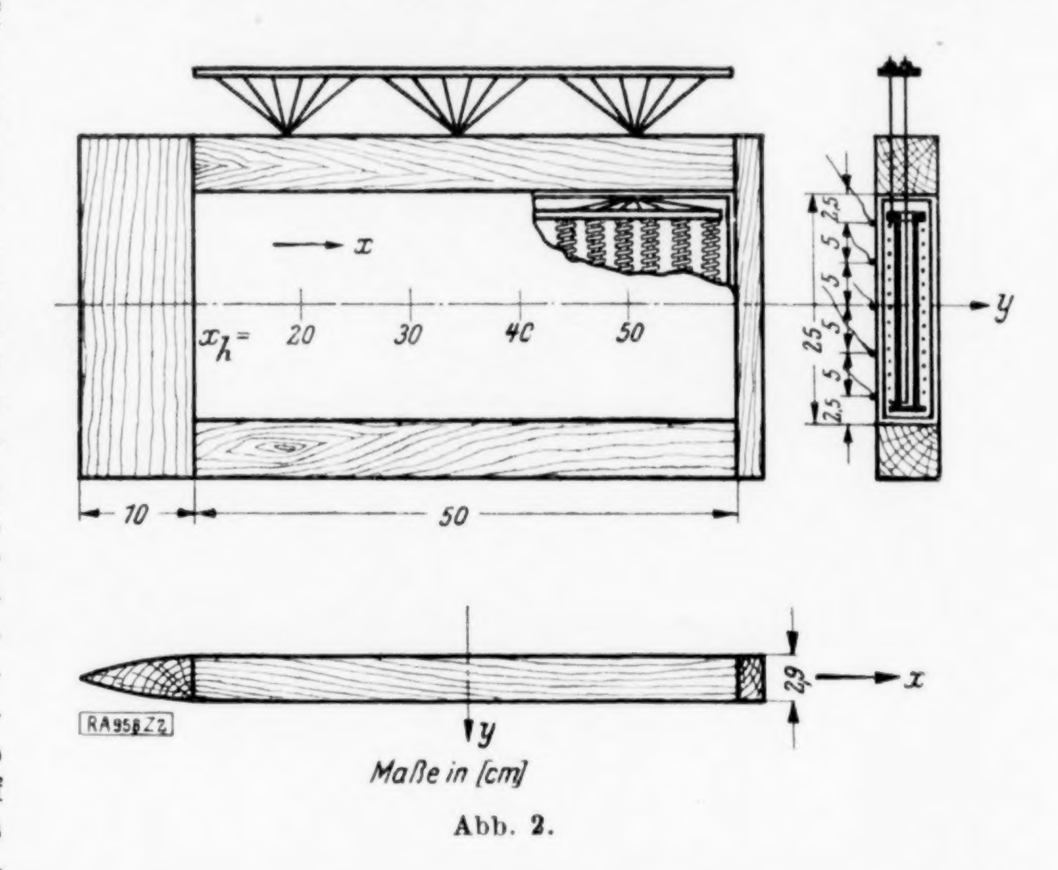


Abb. 2.

Ueber die Wärmeabgabe zwischen einer ebenen Fläche und bewegter Luft sind mehrere experimentelle Arbeiten gemacht worden; diese beschränken sich indessen auf summarische Messungen der abgegebenen Wärme[5]).

2. Zweck der Versuche, Versuchseinrichtung. Vorliegende Arbeit hatte den Zweck, das Temperatur- und Strömungsfeld an einer geheizten ebenen Platte, welche sich in einem Luftstrom befindet, dessen Strömungsrichtung parallel zu ihr ist, experimentell zu ermitteln und daraus die Wärmeübertragung und die Reibung längs der Platte zu errechnen, sowie die Versuchsergebnisse mit der mathematischen Theorie zu vergleichen.

Um mit der Theorie vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, sollte folgender Fall verwirklicht bzw. angenähert werden:

a) zweidimensionale Strömung,
b) konstante Plattentemperatur in der Strömungsrichtung.

Um die zweidimensionale Strömung anzunähern, wurde eine verhältnismäßig breite Platte als Versuchsobjekt gewählt und Geschwindigkeit und Temperatur in der Mittelebene gemessen. Eine gewisse Schwierigkeit bestand darin, die Plattentemperatur über die ganze Länge in der Strömungsrichtung konstant zu halten. Bei gleichmäßig verteilter Heizung und nicht sehr intensiver Wärmeleitung in der Platte selbst würde die Plattentemperatur in der Strömungsrichtung steigen. Diese Temperatursteigerung mußte aus-

[1]) O. Reynolds, An Experimental Investigation of the Circ. etc., Phil. Transact. of the Roy. Soc. Vol, 174 III und Proceedings, Manchester Lit. and Phil Soc. 1874, p. 9.

[2]) L. Prandtl, Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit. Phys. Zeitschr. S. 11, 1910, S. 1672.

[3]) s. Anm. 1 auf S. 434.

[4]) H. Latzko, Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom, Abh. d. Aerodyn. Inst. d. Techn. Hochschule Aachen, Heft 1, S. 36; siehe auch diese Zeitschr., 1921, S. 268.

[5]) W. Jürges, Der Wärmeübergang an einer ebenen Wand. Beihefte zum Gesundheits-Ingenieur, Heft 19, R. Oldenbourg, München-Berlin 1924.

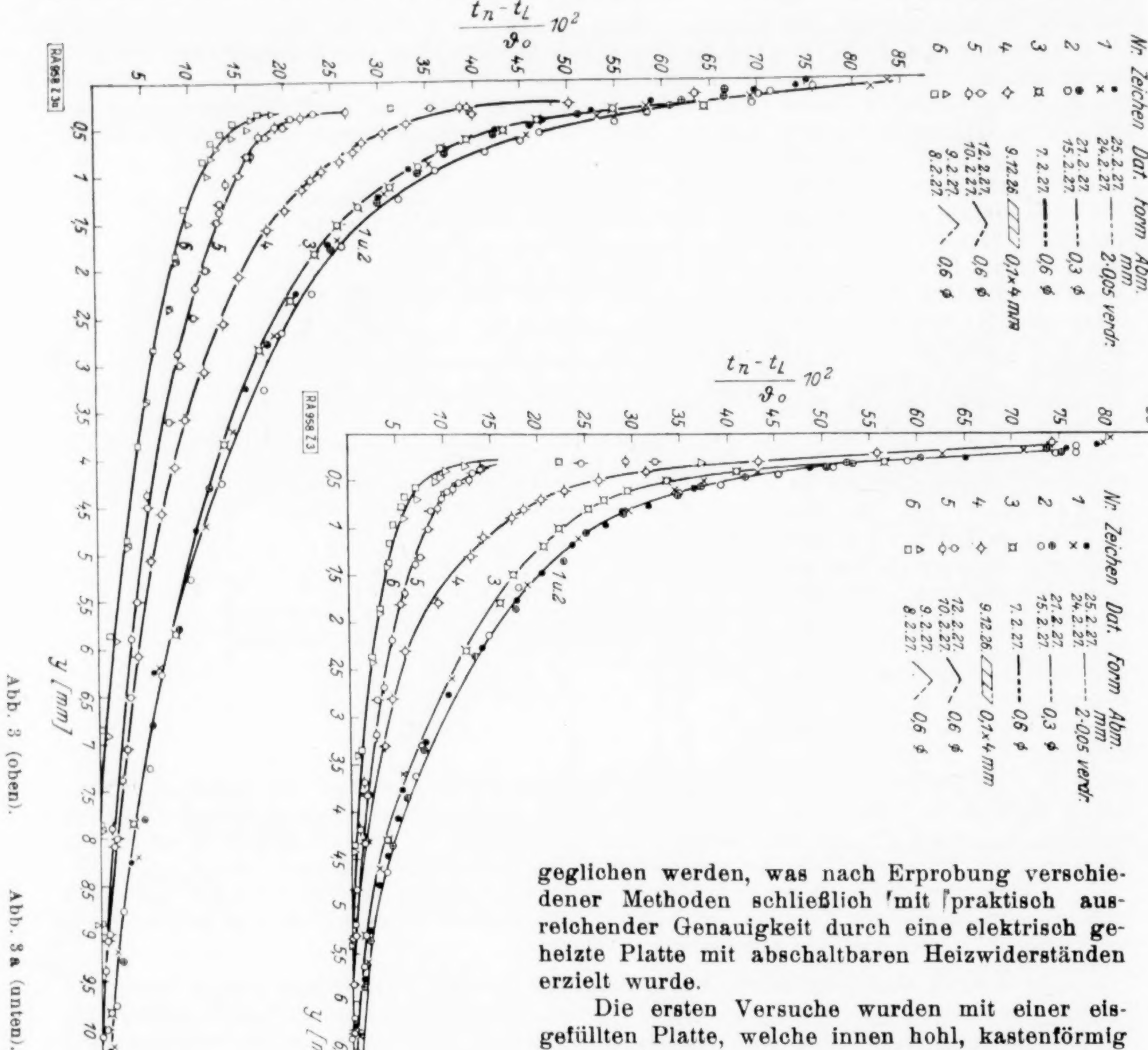


Abb. 3 (oben). Abb. 3a (unten).

geglichen werden, was nach Erprobung verschiedener Methoden schließlich mit praktisch ausreichender Genauigkeit durch eine elektrisch geheizte Platte mit abschaltbaren Heizwiderständen erzielt wurde.

Die ersten Versuche wurden mit einer eisgefüllten Platte, welche innen hohl, kastenförmig ausgebildet war, angestellt. Die Wärme wird in diesem Falle allerdings vom Luftstrom auf die Platte übertragen, was jedoch am Wesen des Versuches nichts ändert. Bei dieser Anordnung schlägt sich indessen an der Oberfläche der Platte Wasser nieder, wodurch einerseits die Versuchsbedingungen sich ändern, andererseits (da das Wasser von der Strömung mitgerissen wird) die Messungen unsicher werden. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, wurde dann statt Eis eine Glaubersalzschmelze verwendet. Diese Methode erwies sich auch als unbrauchbar, da die Erstarrungszeit zu kurz und die Erstarrungstemperatur nicht ganz konstant war.

Bessere Ergebnisse wurden später bei einer kupfernen Platte mit Dampfheizung (Abb. 1) erreicht. (Die Anregungen zu diesen Versuchsvorrichtungen rühren von Hrn. Dr.-Ing. F. N. Scheubel her.) Indem man Dampf in gesättigtem Zustand zur Heizung verwendet, hat diese Anordnung denselben Vorteil, wie die oben beschriebene, nämlich daß die Plattentemperatur unabhängig

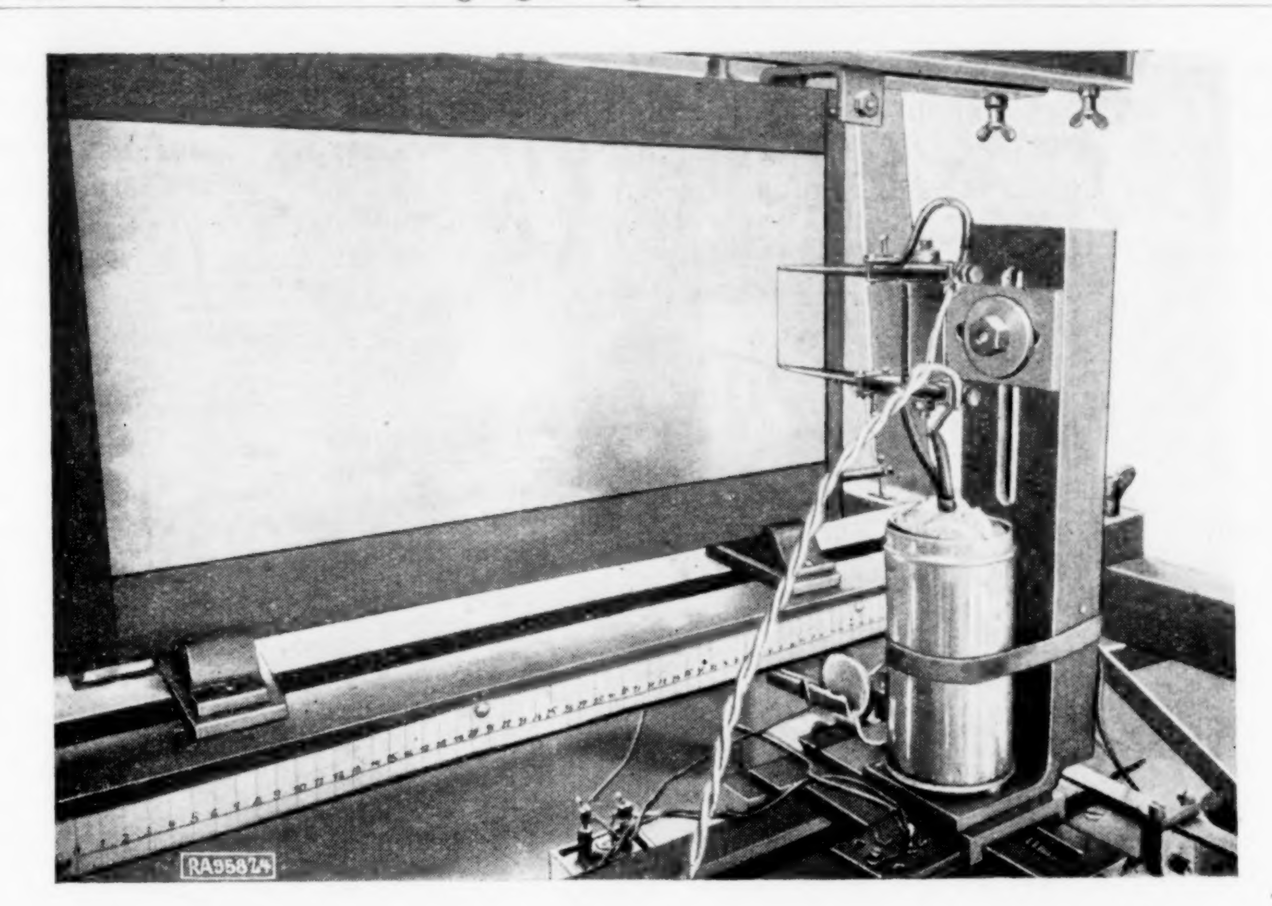


Abb. 4.

von der Geschwindigkeit des Luftstromes und nur in geringem Maße vom Barometerstand abhängig ist. Zur Heizung wurden Aether- bzw. Alkoholdämpfe, die in einem Glaskolben erzeugt wurden, verwendet. Sie wurden mittels Kupferrohre an geeigneter Stelle der Platte (Abb. 1, I) zugeführt, die ebenfalls kastenförmig ausgebildet und zur gleichmäßigen Verteilung des eintretenden Dampfes innen mit Rippen versehen war. Die vier Schmalseiten der Platte wurden zur Verminderung der Wärmeverluste und zwecks Einbau in den Windkanal mit Holz verkleidet. Die Vorderseite war als zugespitzte Anströmkante ausgebildet. Die von der Platte abgeführte Wärme sollte durch Messung der kondensierten Menge geschehen, die an Stelle (II) abgeführt wurde. Eine dritte Zuleitung (III) an der Platte diente zur Prüfung der Kontinuität der Dampfzufuhr. Die Bestimmung der Wärmemenge aus dem Kondensat gelang indessen nicht, da einerseits die Zuleitungen, die aus Metall (Kupfer) hergestellt werden mußten, den Aetherdämpfen Wärme entzogen, andererseits da auch durch die

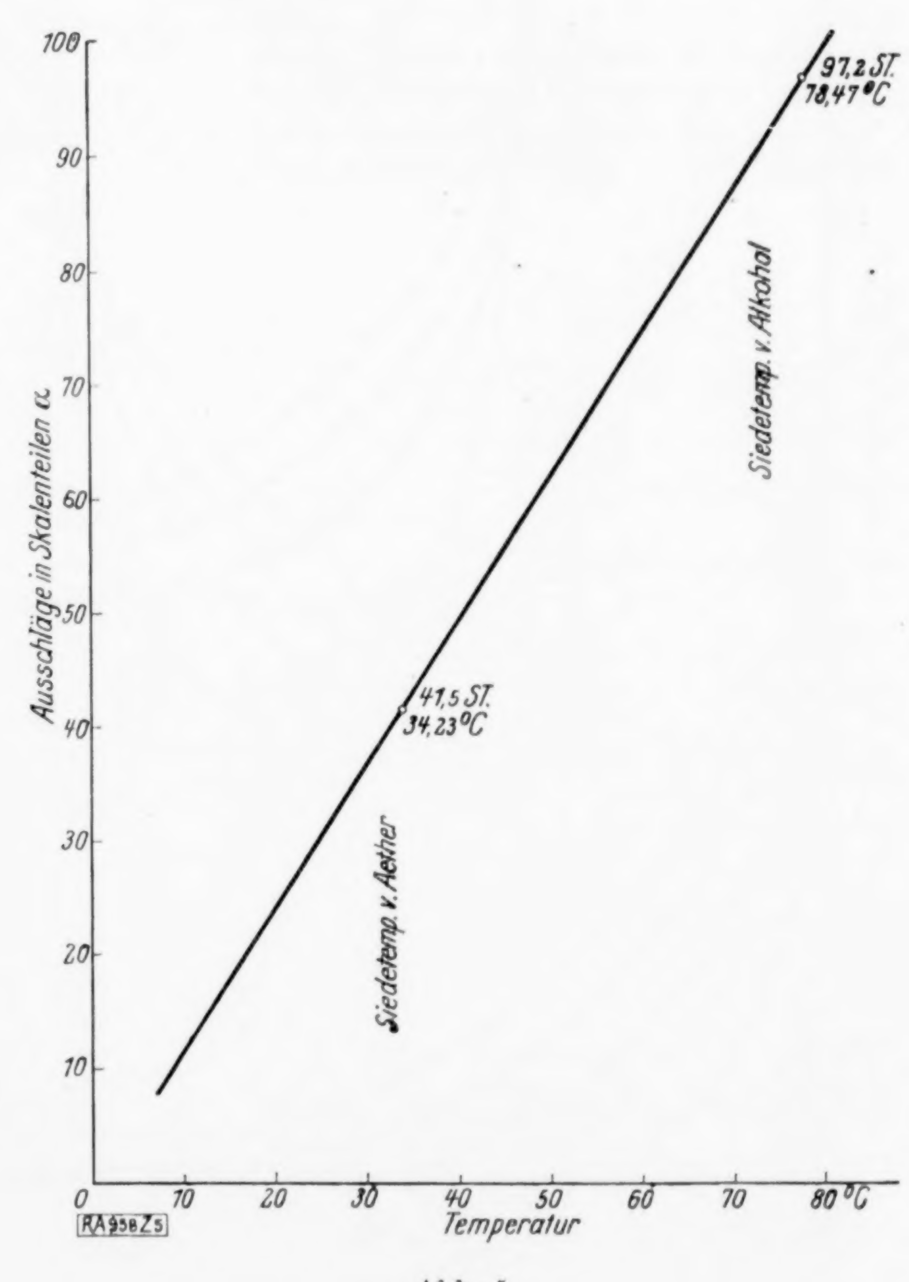


Abb. 5.

Ausflußöffnung (II) Dampf entweichen konnte. Diese Umstände machten bei der geschilderten Ausführung auch eine rohe Kontrolle der Heizenergie unmöglich, welche immerhin, wenn auch die von der Platte abgegebene Wärme in erster Linie aus dem Wärmeinhalt des Luftstromes bestimmt werden sollte, wünschenswert erschien. Sonst er-

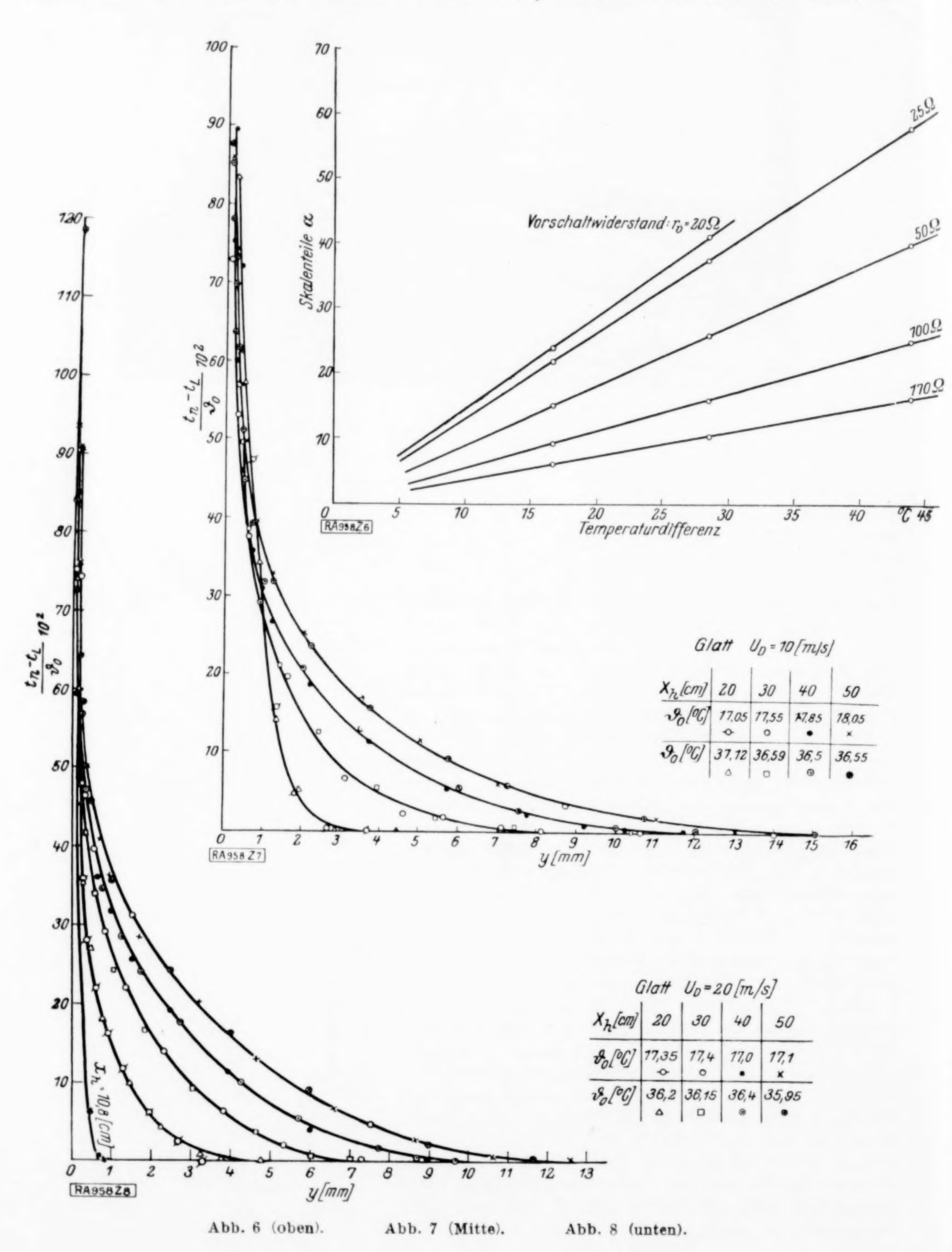


Abb. 6 (oben). Abb. 7 (Mitte). Abb. 8 (unten).

füllte diese Versuchsvorrichtung den gewünschten Zweck vollständig, wie auch unsere Untersuchungen zeigten, die den Zweck hatten, geeignete Thermoelemente für die Temperaturmessungen in der Grenzschicht zu konstruieren (Näheres s. Abschnitt 3). Die Plattentemperatur wurde gleich der Dampftemperatur angenommen und diese mit Hilfe eines Quecksilberthermometers durch die Oeffnung (IV) gemessen. Es zeigten sich in der Temperatur kleine Schwankungen, wahrscheinlich wegen geringer Ueberhitzung, da die Heizung des Aethers durch ein Wasserbad geschah und dieses etwas schwer zu regulieren war.

Da wir auf eine überschlägige Kontrolle der Heizwärme nicht verzichten wollten, so verließen wir diese Methode und haben uns zur direkten elektrischen Heizung der Platte entschlossen. Dieses Verfahren hat den Vorteil bequemer Regulierung der Temperatur und Kontrolle der zugeführten Heizenergie. Diese Platte (Abb. 2) wurde aus 3,5 mm starkem Kupferblech hergestellt und kastenförmig ausgebildet. Im Innern befand sich ein Heizwiderstand mit 18 in der Längsrichtung gleichmäßig verteilten, einzeln abschaltbaren Spiralen. Die Achse der Spiralen lag senkrecht zur Richtung des Luftstromes, um die Heizung durch Zu- oder Abschalten einzelner Heizspiralen in der Strömungsrichtung regulieren zu können. Der Kasten war mit Oel gefüllt, um schon im Innern möglichst guten Temperaturausgleich zu bewirken. Es war außerdem zu erwarten, daß infolge natürlicher Konvektion im Oelbad die Temperatur der Platte in vertikaler Rich-

X_h [cm]	20	30	40	50
ϑ_0 [°C]	17,8 -o-	18,05 ○	17,9 ●	18,4 ×
ϑ_0 [°C]	36,75 △	36,9 □	37,4 ●	37,3 ●

X_h [cm]	10,8	20	30	40	50
ϑ_0 [°C]	16,5 △	16,3 -o-	16,2 ○	16,25 ●	16,4 ×

Abb. 9 (oben). Abb. 10 (unten).

tung nicht konstant sein würde, was gegebenenfalls bei den Berechnungen berücksichtigt werden mußte. Mit Rücksicht auf einen guten Temperaturausgleich waren die Seitenwände aus starkem Kupferblech hergestellt. Durch diese drei Maßnahmen ist es gelungen, in der Meßebene, in der die Lötstelle des Thermoelementes bewegt wurde, die Temperatur der Platte in der Strömungsrichtung mit für unsere Versuche hinreichender Genauigkeit auf einen beliebigen konstanten Wert einzuregulieren. Die 4 Schmalseiten der Platte waren zwecks Einbau in den Windkanal und zur Wärmeisolierung mit Holz verkleidet. Die Vorderseite war als spitze Anströmkante von 10 cm Länge ausgebildet. Damit ein unmittelbarer Vergleich mit den Versuchsergebnissen von W. Jürges (s. o.) stattfinden konnte, wurde die Länge der Platte wie bei seiner Anordnung zu 50 cm gewählt.

Bei der elektrisch geheizten Platte konnte die Temperatur des Oelbades wegen örtlicher Temperaturerhöhungen durch die Heizspiralen nicht als Grundlage zur Feststellung der Plattentemperatur dienen. Die Temperatur der Platte wurde daher an verschiedenen Stellen mittels Thermoelementen gemessen. Sie wurden nach dem Grundsatz[1]) ausgebildet, daß nicht nur die Lötstelle selbst, sondern auch ein entsprechend langer Teil der Elementendrähte die zu messende Temperatur annehmen soll, da anderenfalls die Lötstelle die zu messende Temperatur gar nicht annehmen kann. Sie wurden aus Konstantan- und Manganindraht von je 0,6 mm Dmr. hergestellt und in 60 mm lange Nuten, in deren Mitte sich jeweilig die Lötstellen befanden, eingelötet. Um die nötige Anzahl und Anordnung dieser Elemente festzulegen, wurden zwei besondere Thermoelemente angefertigt, welche mit geeigneten Klemmvorrichtungen an die Platte gedrückt wurden und mit denen die Temperatur an verschiedenen

[1]) Knoblauch-Hencky, Anleitung zu genauen technischen Temperaturmessungen, S. 59. R. Oldenbourg, München-Berlin 1926.

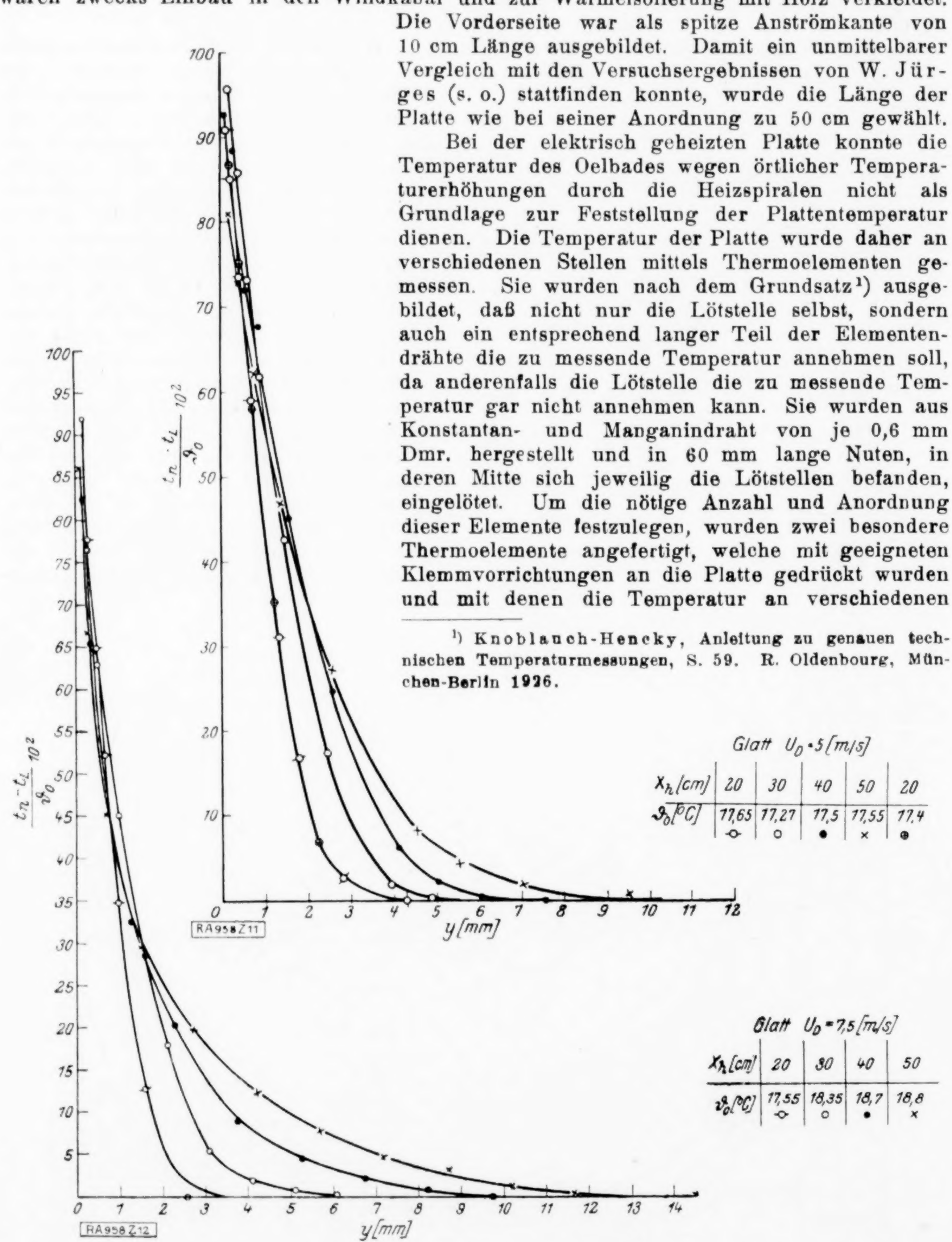


Abb. 11 (oben). Abb. 12 (unten).

Stellen gemessen wurde. Auf Grund dieser Messungen haben wir siebzehn Oberflächenthermoelemente angebracht.

Um die Messungen in der Grenzschicht an einer Seite ungestört durchführen zu können, wurden alle Thermoelemente auf der anderen Seite der Platte untergebracht. Hierdurch können selbstverständlich die Strömungsverhältnisse an der betreffenden Seite nicht ungestört bleiben, man kann indessen annehmen, daß diese Störung auf die Temperaturverteilung in der Wand keinen wesentlichen Einfluß ausübt, so daß die Temperaturwerte, die auf der einen Seite der Wand gemessen wurden, unmittelbar auch auf die andere übertragen werden können. Die Temperaturmessung an der Platte wurde in folgender Weise durchgeführt: Die ganze Platte war parallel zur Strömungsrichtung von der Mittelachse aus in 5 Abschnitte von je 5 cm Entfernung gleichmäßig eingeteilt. In jeder der Trennungslinien befanden sich je 3 der 17 Oberflächenthermoelemente. Die durch diese ermittelten Temperaturwerte, die zu einer Ebene gehörten, wurden graphisch aufgetragen und ihr Mittel wert gebildet. Man erhält auf diese Weise mittlere Temperaturwerte, die zu den fünf Abschnitten der Platte gehören. Da das Thermoelement für die Grenzschichtmessung eine Meßlänge von 8 cm — parallel zur Platte und senkrecht zur Luftströmung — hatte, so wurden bei der Bestimmung der mittleren Plattentemperatur nur die Temperaturwerte der zwei mittleren Abschnitte entsprechend drei Ebenen, die je 5 cm voneinander entfernt lagen, berücksichtigt. Ihr Mittelwert, welcher die mittlere Plattentemperatur ergab, wurde ebenfalls graphisch ermittelt.

Da die Mittelwerte der Temperaturen dieser drei Ebenen einen senkrecht zur Strömungsrichtung linear zunehmenden Verlauf aufwiesen, so hat man tatsächlich mit dem Thermoelement für die Grenzschichtmessung die Temperatur in der Mittelachse der Platte — Meßebene — gemessen, da für diese Ebene die Abweichungen der Temperaturen in den drei Ebenen im Mittel sich gerade aufhoben. Die Temperatur in der Meßebene, wo die Lötstelle

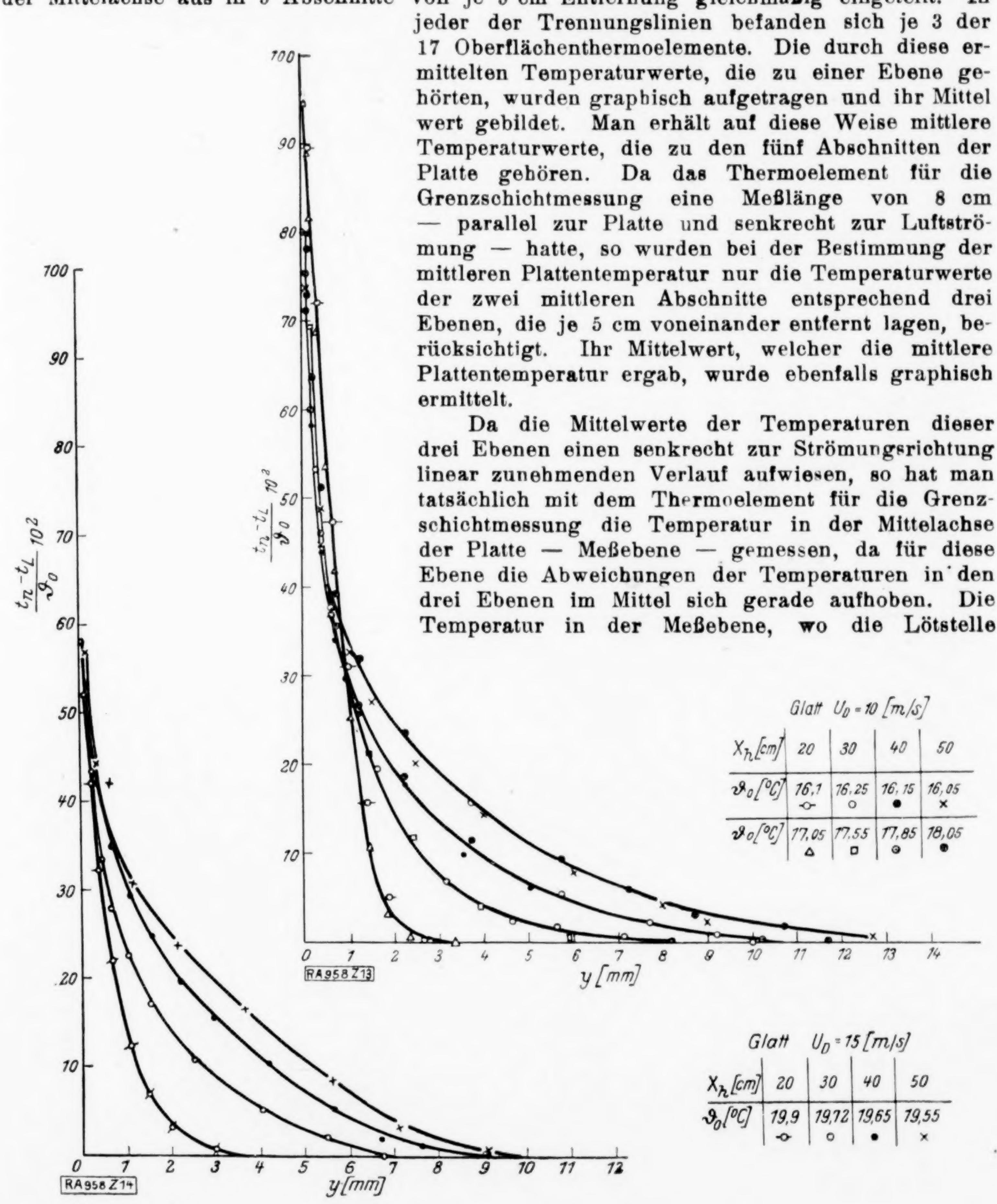


Abb. 13 (oben). Abb. 14 (unten).

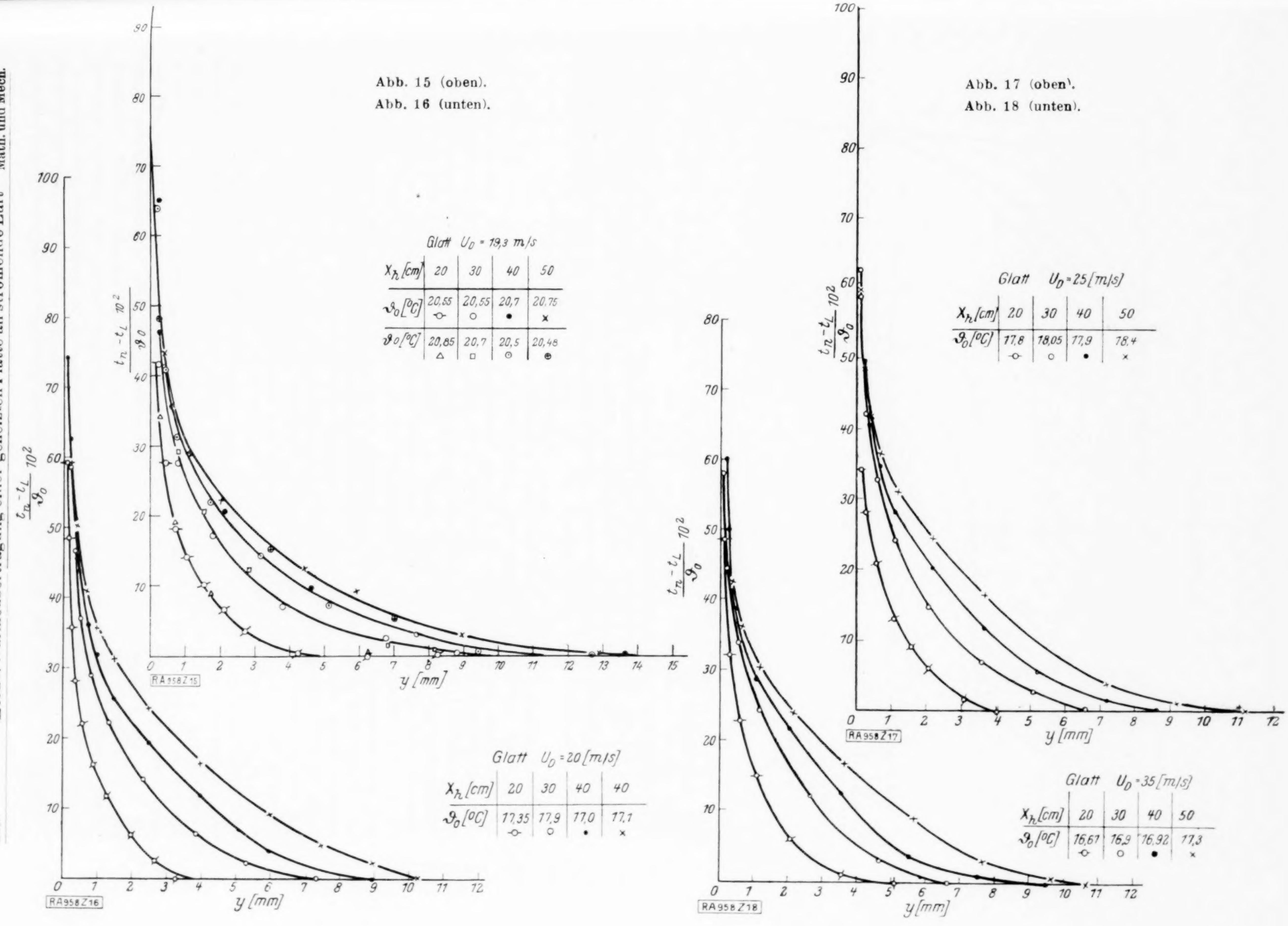


Abb. 15 (oben).
Abb. 16 (unten).

Abb. 17 (oben).
Abb. 18 (unten).

des Thermoelementes bewegt wurde, konnte mit einer Genauigkeit von 2 bis 3 vH der Uebertemperatur der Platte über die Außenluft auf einen konstanten Wert einreguliert werden. Es ergab sich, daß das Verhältnis der so gefundenen mittleren Plattentemperatur zu der gemessenen Temperatur in der Plattenmitte auch bei geringen Temperaturschwankungen konstant blieb. Man konnte sonach die mittlere Plattentemperatur aus einer einzigen Ablesung der Temperatur in der Plattenmitte, die mit Hilfe eines Galvanometers ständig gemessen wurde, bestimmen. Diese wurde dann für jede Geschwindigkeit auf einen bestimmten Wert eingestellt und dauernd gemessen. Die zweite Lötstelle der Thermoelemente befand sich in Eis. Gegen diese konnten dann sämtliche Elemente der Reihe nach geschaltet werden.

Da die zu messenden Temperaturen und somit auch die zugehörigen Galvanometerausschläge sich wenig voneinander unterschieden, so wurde beim Wechsel der Meßstellen zuerst das eine Thermoelement mit dem darauf folgenden parallel geschaltet und dann erst die Schaltung mit dem vorhergehenden gelöst. So mußte sich der Zeiger des Galvanometers nur um ein Stück bewegen, welches der Differenz der Temperaturen der zwei Meßstellen entsprach. Hierdurch erzielte man eine rasche Folge der Ablesungen.

3. Die Temperaturmessung in der Grenzschicht. Die geringe Ausdehnung der Grenzschicht erfordert entsprechende Auswahl und Gestaltung der Meßvorrichtungen. Zur Temperaturmessung kommt neben dem Wider-

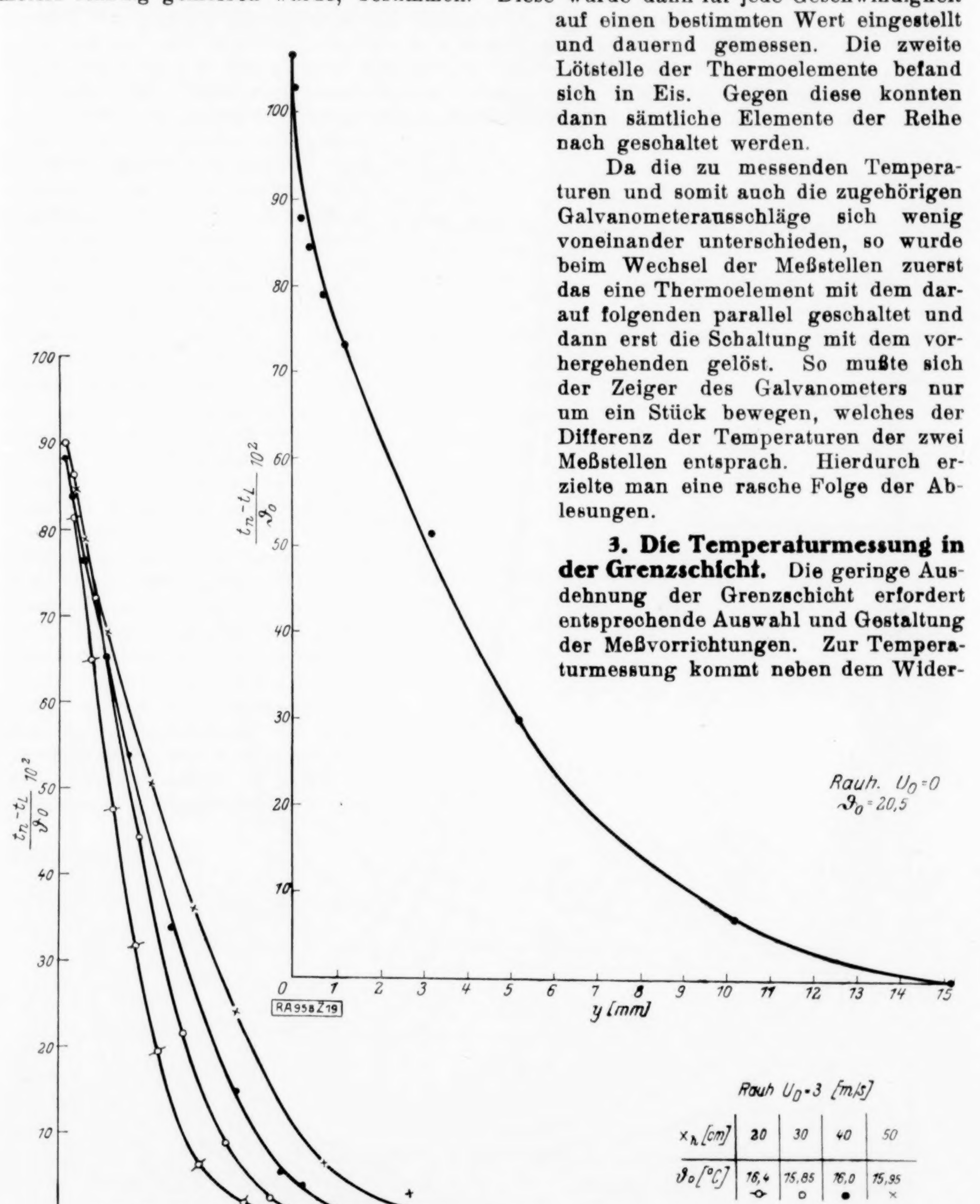


Abb. 19 (oben). Abb. 20 (unten).

standsthermometer nur das Thermoelement in Frage. Da sich das Widerstandsthermometer weniger zur Messung der Temperatur an einem Punkt eignet, so wählten wir das Thermoelement. Bevor die endgültige Wahl über dessen Material, Form, Querschnitt und Drahtstärke getroffen wurde, wollten wir insbesondere auf Anregung des Herrn Dr.-Ing. F. N. Scheubel die Fehlerquellen, die hierbei auftreten können, systematisch untersuchen.

Für die richtige Temperaturmessung müssen zwei Gesichtspunkte beachtet werden. Erstens darf das Thermoelement, in die Luftströmung gebracht, dort keine merkbaren Störungen verursachen. Zweitens muß dafür gesorgt werden, daß die Lötstelle des Thermoelementes diejenige Temperatur, in welcher es sich befindet, auch in der Tat annehmen kann[1]). Die erste Forderung wird dadurch erfüllt, daß man Drähte von geringer Stärke mit Querschnittsformen von möglichst kleinem Luftwiderstand anwendet. Die Grenze des Drahtdurchmessers wird durch die erforderliche mechanische Festigkeit des Drahtes gegeben, der gespannt werden muß. Zur Temperaturmessung wird die eine Lötstelle des Thermoelementes an diejenige Stelle der Grenzschicht gebracht, deren Temperatur bestimmt werden soll. Hierdurch ist indessen noch nicht gesichert, daß das Thermoelement die Temperatur dieser Stelle richtig angibt, wenn die übrigen Teile der Elementendrähte durch einen Bereich geführt werden, dessen Temperatur von derjenigen der Lötstelle verschieden ist, da in diesem Falle ein Wärmeausgleich zwischen der Lötstelle und den übrigen Teilen des Elementes stattfindet. Diesen Uebelstand vermeidet man in unserm Falle am einfachsten, wenn man die Drähte, die zu der Lötstelle führen und die man möglichst dünn ausführen wird, parallel zur Platte, aber senkrecht zur Strömungsrichtung ausspannt. Falls es gelungen wäre, ein exakt zweidimensionales Temperaturfeld zu verwirklichen, so wäre in dieser Richtung gar kein Temperaturgefälle vorhanden.

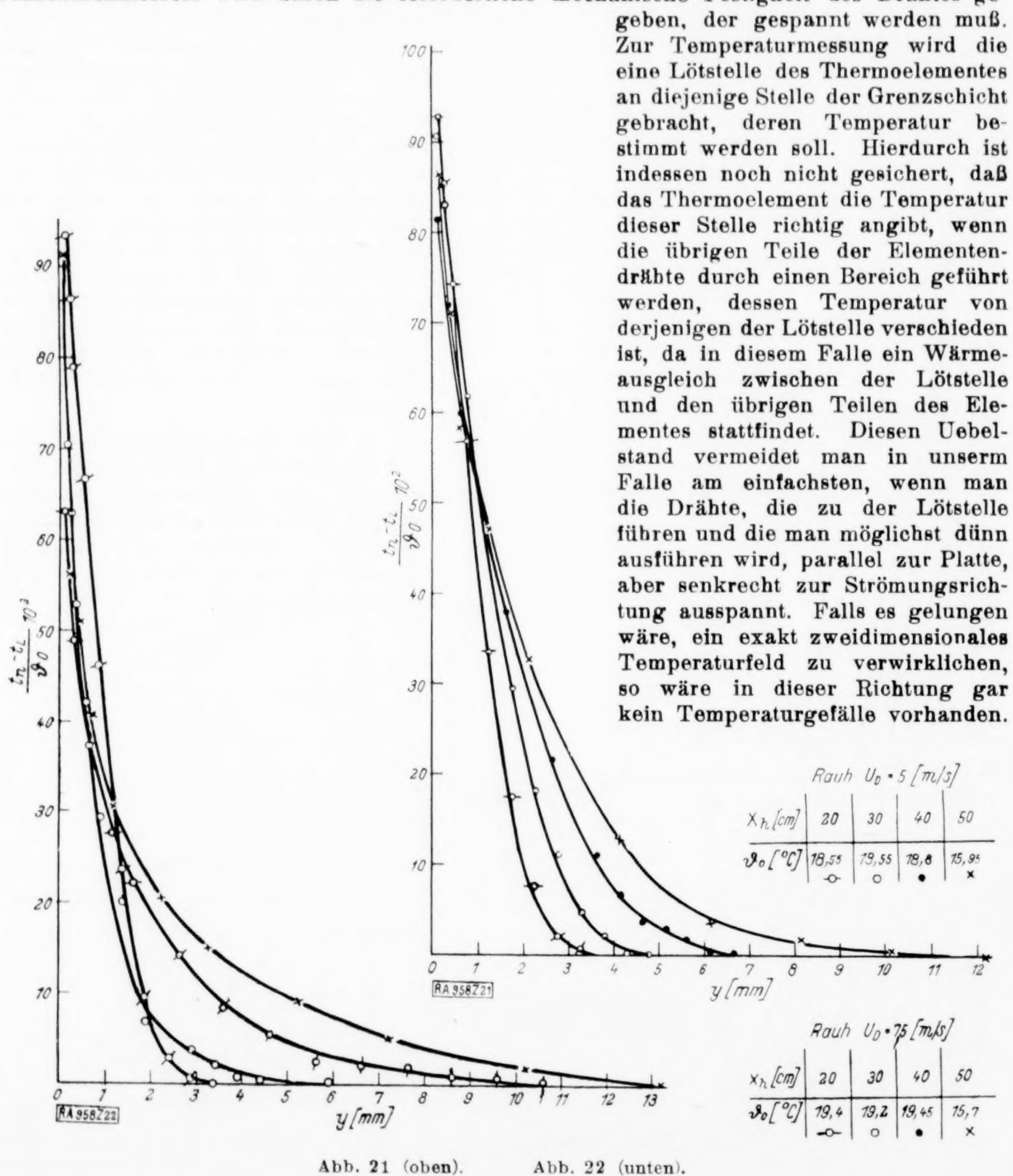


Abb. 21 (oben). Abb. 22 (unten).

[1]) Ueber ein Verfahren, das gestattet, bei Messungen mittels Hitzdrahtmethode die thermische Trägheit des Meßdrahtes zu berücksichtigen, soll später berichet werden.

In der Tat war die Temperatur nach der Höhe linear veränderlich; man kann also annehmen, daß von der einen Seite der Lötstelle dieselbe Wärmemenge zuströmt wie nach der anderen Seite abströmt, so daß die Lötstelle doch die richtige Temperatur anzeigt.

Wie wichtig die Beachtung des Wärmeausgleiches ist, erhellt aus den folgenden Vergleichsversuchen. Es wurden sechs verschiedene Thermoelemente mit verschiedener Form und Drahtstärke unter sonst gleichen Verhältnissen untersucht. Die Meßergebnisse sind in Abb. 3 und 3a dargestellt.

Thermoelement I. Hergestellt aus Kupfer- und Konstantandrähten von 0,05 mm Drm. Die beiden Drähte waren ineinandergesteckt, verdrillt und verlötet. Die Länge der Meßstrecke betrug 43 mm. Die übrigen Teile des Thermoelements waren aus Kupfer- bzw. Konstantandrähten von 0,6 mm Drm. hergestellt.

Thermoelement II. Wie I, nur bestand die 80 mm lange Meßstrecke aus Kupfer- und Konstantandrähten von 0,3 mm Drm. Die Lötstelle wurde durch stumpfes Aneinanderlöten der beiden Drahtenden gebildet.

Thermoelement III. Wie II, jedoch aus Drähten von 0,6 mm Drm.

Thermoelement IV. Aus 0,1×3 mm Kupfer- und Konstantanband. Meßstrecke 80 mm. An der Meßstrecke waren die beiden Bänder in einer Länge von 30 mm Länge aufeinandergelegt und verlötet.

Thermoelement V. Aus Kupfer- und Konstantandrähten von 0,6 mm Drm. Die Drähte bildeten an der Lötstelle einen Winkel von 90°.

Thermoelement VI. Wie V, jedoch betrug der Winkel an der Lötstelle 130°.

Man sieht aus den Abb. 3 und 3a, daß die winkelförmig ausgebildeten Thermoelemente völlig falsche Ergebnisse liefern. Die Messungen, die mit solchen Thermoelementen in einem stark veränderlichen Temperaturfeld

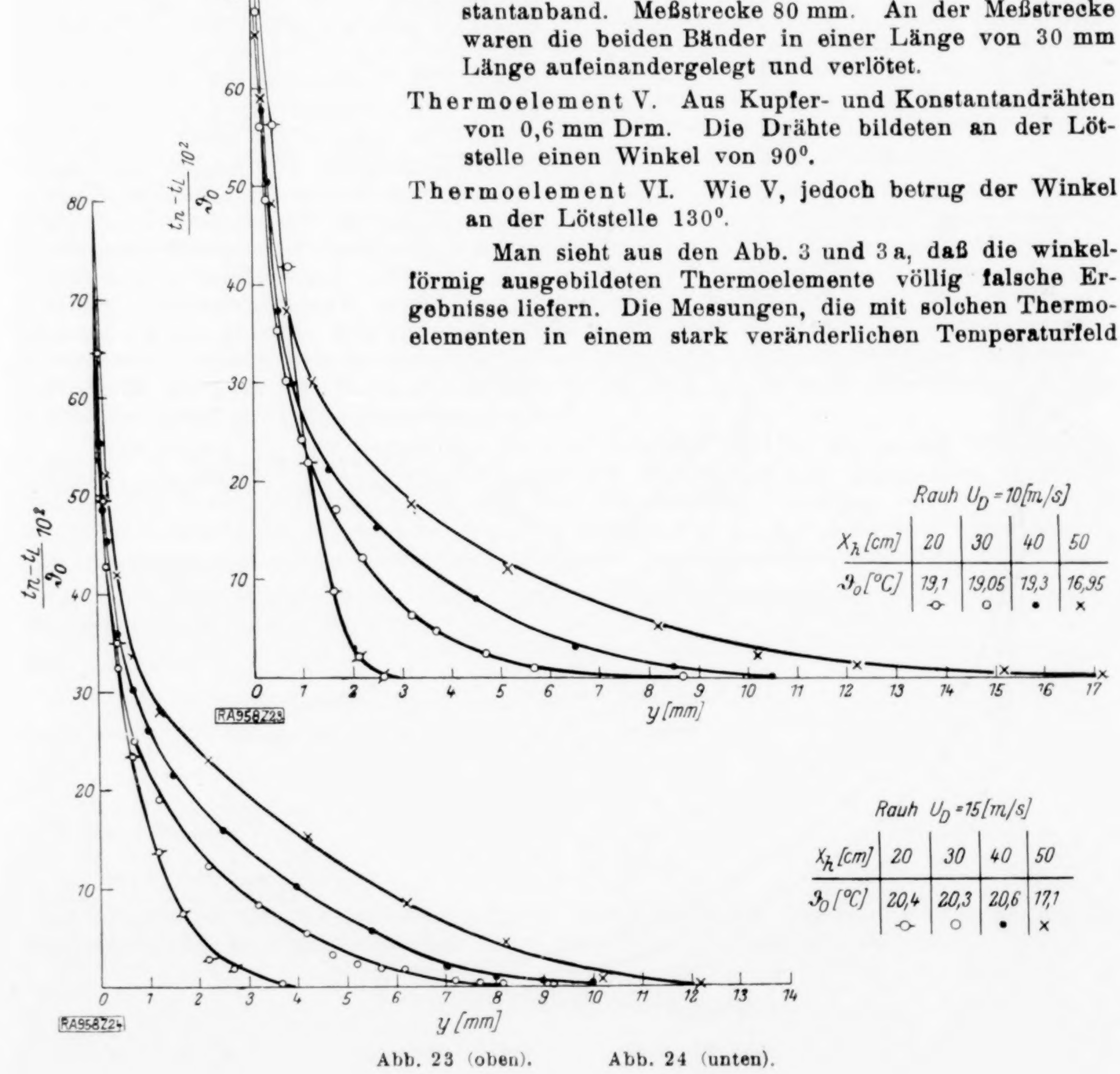


Abb. 23 (oben). Abb. 24 (unten).

ausgeführt worden sind, muß man daher mit großer Vorsicht aufnehmen, wie z. B. auch die Messungen von Ludowici[1]).

Der Einfluß des Durchmessers ist im Vergleich zu dem Einfluß der Form verhältnismäßig gering.

Die Messungen sind an drei verschiedenen Stellen der mit Aetherheizung erwärmten Platte, nämlich am Anfang, in der Mitte ($x_{th} = 17{,}5$ cm) und am Ende ($x_{th} = 34$ cm) durchgeführt worden. Die Messungen mit den Thermoelementen Nr. 1, 2, 5 und 6 sind zur Kontrolle wiederholt worden und lieferten beidemale dieselben Ergebnisse. Aus den Schaulinien ist zu ersehen, daß die Fehler, welche man durch unrichtig durchgebildete Thermoelemente begehen kann, unter Umständen mehrere hundert Prozent betragen. Aus den Kurven 1 bis 3 sieht man, daß auch bei derselben Anordnung der Drahtdurchmesser einen Einfluß hat. Bei Verkleinerung desselben kommen die Temperaturkurven höher zu liegen. Die Kurven für die Drm. 0,3 mm und $2 \times 0{,}05$ mm verdrillt fallen zusammen; man kann annehmen, daß man zu einer Grenze gekommen ist, an welcher das Element mit praktisch ausreichender Genauigkeit die wirkliche Temperatur der Meßstelle angibt. Die Meßstrecken der Thermoelemente, die wir zu den Hauptversuchen verwendeten, wurden aus unverdrilltem Manganin- und Konstantandraht 0,1 mm Drm. hergestellt. Zu der zweiten Lötstelle — im Eis — und zu den Klemmen des Halters führten Drähte desselben Materials mit größerem Querschnitt — $4 \times 0{,}1$ mm — um möglichst wenig schädlichen Widerstand im Stromkreis zu haben. Wir hatten das Kupfer mit Manganin vertauscht, da das letztere die gleiche Wärmeleitfähigkeit wie Konstantan besitzt. Dies hat den Vorteil symmetrischen Temperaturverlaufes im Thermoelement in bezug auf die Lötstelle. Es wurden ferner Versuche über die Verwendbarkeit von Platin-Platinrhodium-Thermoelementen gemacht. Sie erwiesen sich in bezug auf mechanische Festigkeit als unzureichend. Außerdem ist ihre Thermokraft nur etwa ein Viertel der des Konstantan-Manganin Thermoelementes.

[1]) W. Ludowici, Messungen in der Grenzschicht strömender Gase, VDI-Zeitschr., Bd. 70 (1926), S. 1122 ff.

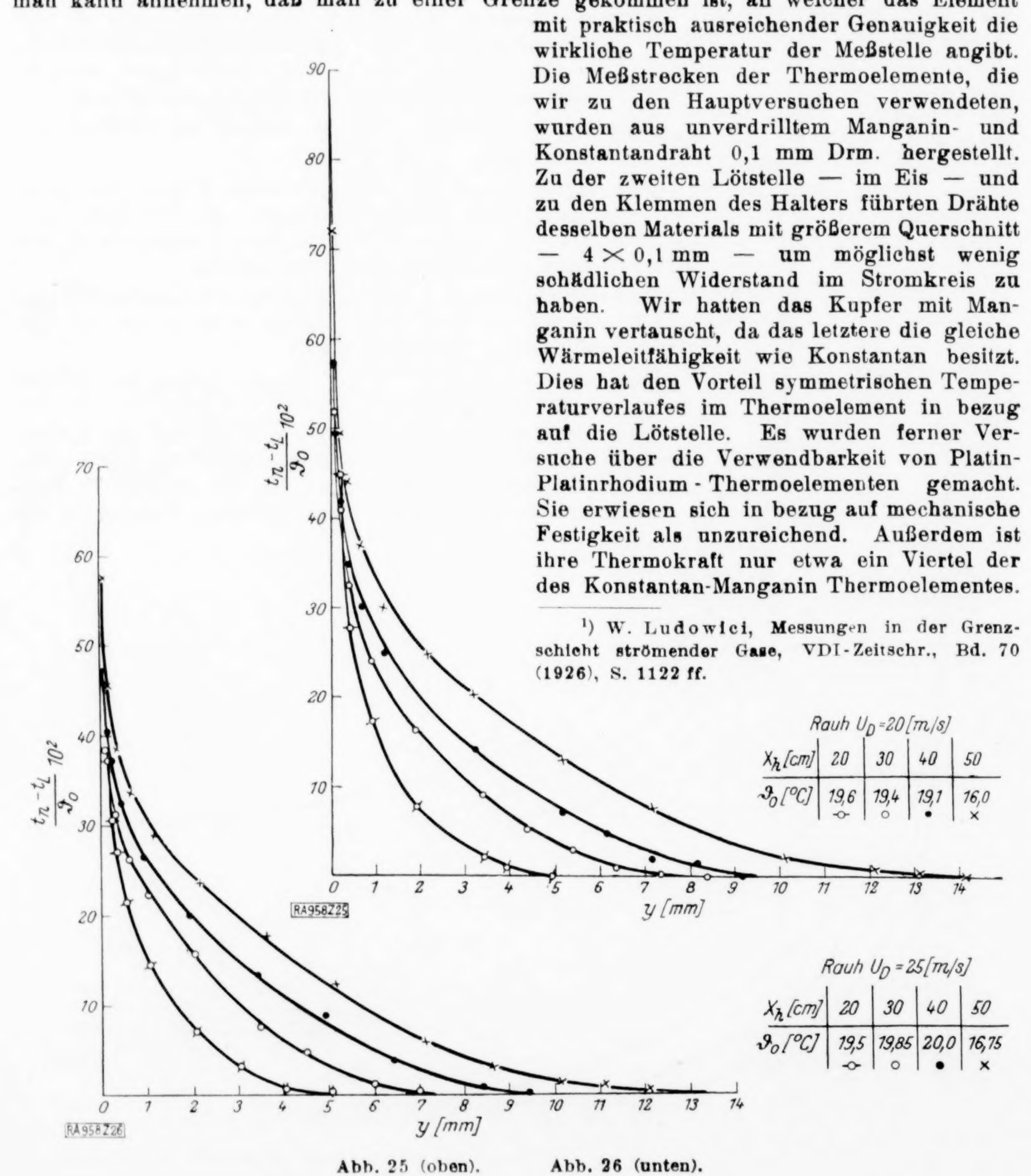


Abb. 25 (oben). Abb. 26 (unten).

Die Thermoelemente wurden auf einen isolierten Rahmen aus Bakelitpappe (Abb. 4) gespannt. Zum Meßinstrument führten gewöhnliche Kupferlitzen. Der Rahmen wurde an den Stahlhalter eines abmontierten Drehbankbettes befestigt. Hierdurch war es möglich, das Thermoelement in der Strömungsrichtung (x) und senkrecht zur Platte (y) zu bewegen. Die y-Koordinaten wurden mittels eines Stahlmaßstabs mit Nonius abgelesen, der eine Ablesegenauigkeit von 1/50 mm gestattete. In der x-Richtung genügte ein gewöhnlicher Maßstab mit Zeigerablesung. Diese ganze Vorrichtung wurde, um Erschütterungen zu vermeiden, vor der Düse des Windkanals auf einen Betonblock befestigt.

Als Nullage wurde diejenige Stellung des Thermoelementes betrachtet, bei der zwischen Platte und Thermoelement eine innige Berührung stattfand. Um diese Lage genau und reproduzierbar feststellen zu können, hatten wir eine elektrische Kontaktvorrichtung vorgesehen. Die Nullage konnte am Aufleuchten einer kleinen Signallampe genau erkannt werden.

Das Thermoelement zeigte in dieser Lage insbesondere bei größeren Geschwindigkeiten eine kleinere Temperatur an, als die Platte hatte. Der Unterschied entsteht dadurch, daß die freiliegenden Teile des Meßdrahts, der nicht besonders an die Platte angepreßt wurde, durch den Luftstrom gekühlt werden. Ein solches Thermoelement würde daher zur Messung der Oberflächentemperatur sich nicht eignen. Zur Bestimmung der Plattentemperatur haben wir daher die im früheren Abschnitt erwähnten Oberflächenthermoelemente (s. Abschnitt **2**) vorgesehen. Zur Eichung der Thermoelemente wurde ein Flüssigkeitssiedeapparat mit Strahlungsschutz nach Knoblauch-Hencky[1]) angefertigt. In diesem werden gesättigte Dämpfe (z. B. vom Alkohol bzw. Aether) erzeugt, so daß die Temperatur beliebig lange Zeit konstant gehalten werden kann. Die zweite Lötstelle war in einen Behälter mit schmelzendem Eis gelegt. Der Flüssigkeitssiedeapparat und auch der Eisbehälter wurden später durch mit heißem Wasser bezw. mit Eis gefüllte Thermosflaschen ersetzt. Sie erfüllen den gewünschten Zweck und besitzen den Vorteil, daß die Innenwand der Flasche die Temperatur der darin enthaltenen Flüssigkeit annimmt.

Abbildungen 5 und 6 enthalten die Eichkurven von Kupfer-Konstantan- und von Manganin-Konstantan-Thermoelementen. Für die bei unseren Messungen in Frage kommenden Temperaturdifferenzen besteht zwischen Thermostrom bezw. Thermospannung und Temperatur eine lineare Beziehung. Man erkennt ferner, daß die Verbindungslinie der drei bezw. zwei Meßpunkte nicht durch den Ursprung des Koordinatenkreuzes geht. Daraus läßt sich folgern, was auch durch Messungen bestätigt wurde, daß die gradlinige Abhängigkeit nur bis zu den gemessenen Grenzen unbedingt gültig ist und bei geringen Temperaturdifferenzen (etwa ven 5^0 C ab) die Eichkurve des Thermoelementes parabelförmig, unter Umständen auch ganz unregelmäßig, verläuft.

Wir haben bei den Messungen die eine Lötstelle stets in Eis gelegt, wodurch die geringste zu messende Temperaturdifferenz die der Zimmerluft gegen Eis war. Zur Bestimmung der Temperatur hatten wir den Thermostrom gemessen, da die Werte in möglichst rascher Folge aufgenommen werden mußten, und somit auf die sonst vorzuziehende Spannungsmessung mittels Kompensationsmethode verzichtet werden mußte.

Die Thermospannungen der eingelieferten Elementendrähte hatten wir mittels Kompensationsmethode bestimmt.

Wir fanden:

für ein Maganin-Konstantan-Thermoelement die Spannung:

$$3{,}76 \cdot 10^{-2}\left[\frac{\text{Volt}}{100^0\ \text{C}}\right],$$

für ein Kupfer-Konstantan-Thermoelement die Spannung:

$$3{,}64 \cdot 10^{-2}\left[\frac{\text{Volt}}{100^0\ \text{C}}\right].$$

Nach Knoblauch-Hencky (a. a. O. S. 129) liegt die Thermospannung für Kupfer-Konstantan-Thermoelemente je nach den verwendeten Materialien zwischen

$$3{,}6 \cdot 10^{-2} \quad \text{und} \quad 4 \cdot 10^{-2}\left[\frac{\text{Volt}}{100^0\ \text{C}}\right].$$

[1]) Siehe Anm. 1 auf S. 440.

Den Thermostrom hatten wir mit Hilfe von Zeigergalvanometern (von Siemens & Halske) mit Drehspulmeßwerk und Bändchenaufhängung gemessen. Die Empfindlichkeit betrug für ein Skalenteil 10^{-4} Volt. Der Widerstand der Meßwerke ist etwa 18 Ω, des eingebauten Vorschaltwiderstandes bei dieser Spannungsempfindlichkeit 182 bzw. 176 Ω. Durch entsprechende Vorschaltwiderstände konnte man den Ausschlag entsprechend der jeweiligen Temperaturdifferenz so einregulieren, daß zur Messung ein möglichst großes Bereich der Skala zur Verfügung stand, wodurch die Meßgenauigkeit entsprechend erhöht wurde.

4. Versuchsergebnisse. Die Geschwindigkeit der freien Strömung U_D wurde zwischen 3 und 35 (m/sek) variiert. Die untere Grenze war durch die Regulierungsmöglichkeiten des Windkanals, die obere dadurch festgelegt, daß bei höheren Geschwindigkeiten Schwingungen des Thermoelementes auftraten. Durch die Hin- und Herbewegung kommt die Lötstelle in der Grenzschicht in Bereiche verschiedener Temperatur, so daß der Galvanometerzeiger in Schwingung gerät.

Die Temperaturdifferenz ϑ_0 zwischen Platte und ungestörtem Luftstrom betrug bei den Hauptversuchen zumeist 16 bis 20 (°C). Einige Versuche wurden bei Uebertemperaturen zwischen 36 und 37,5 (°C) vorgenommen. Wie zu erwarten war, sind die Temperaturkurven untereinander ähnlich, entsprechend der Tatsache, daß der Wärmeübergang in diesem Bereiche der Temperatur proportional

Abb. 28 (unten).

Abb. 27 (rechts).

ist. Abb. 7, 8, 9 zeigen $\frac{t_n - t_L}{\vartheta_0}$ für verschiedene Geschwindigkeiten als Funktion von y (t_n = Temperatur in der Grenzschicht, t_L = Temperatur im freien Luftstrom).

Die Temperatur des Luftstromes erhöhte sich in geringem Maße durch die abgegebene Wärme der Platte, deren Temperatur ihrerseits dann ebenfalls stieg, da die Heizleistung konstant blieb. Die Messung eines Temperaturprofiles in der Grenzschicht er-

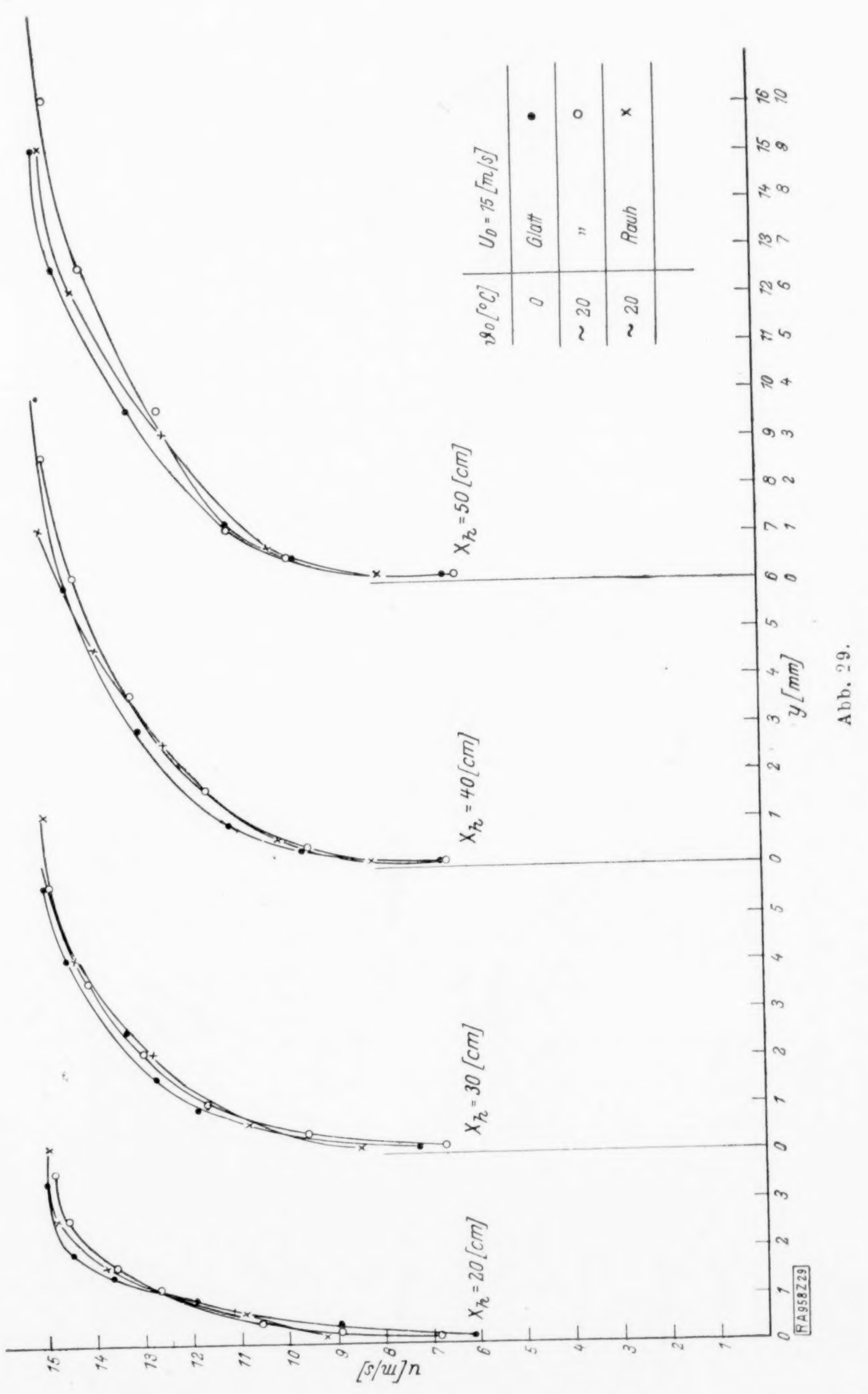


Abb. 29.

folgte jedoch in so kurzer Zeit (in 5 bis 10 Min.), daß als Temperatur der Außenluft diejenige Temperatur angenommen werden konnte, die nach Erreichung des ungestörten Luftstromes mit dem Thermoelement für die Grenzschicht gemessen wurde.

Die Temperaturkurven wurden längs der Platte an vier Meßstellen aufgenommen, die wir mit $x_h = 20$, 30, 40 und 50 bzw. mit $x_{th} = 10$, 20, 30 und 40 bezeichnet haben.

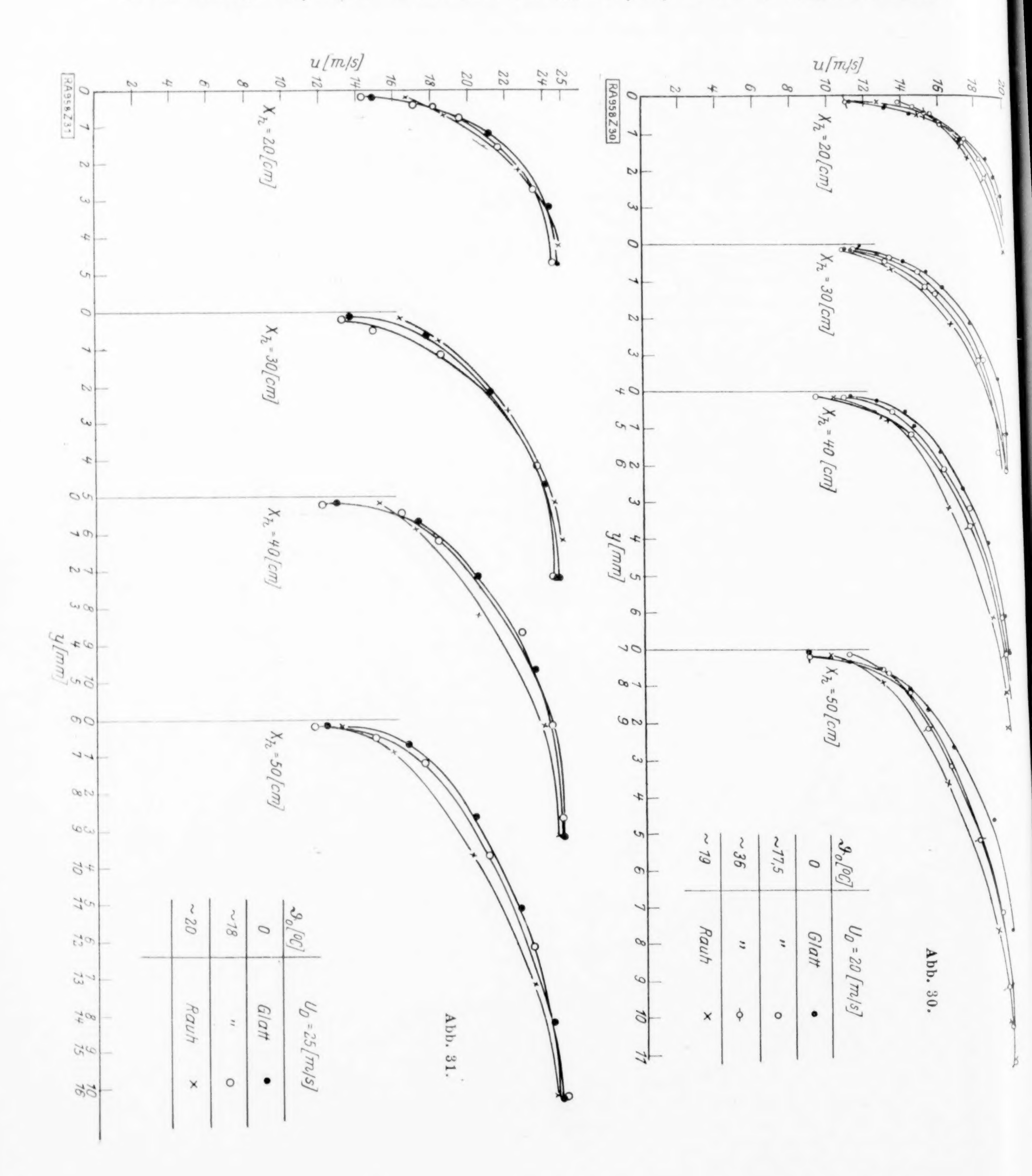


Abb. 30.

Abb. 31.

x_h bezeichnet hierbei die Entfernung der Meßstelle von der Anströmspitze, dem Beginn der hydrodynamischen Grenzschicht. x_{th} die Entfernung von dem Beginn der thermischen Einwirkung. Das ist die Trennlinie zwischen geheizter Kupferplatte und Holzisolation der Anströmspitze.

Die Temperaturkurven (Abb. 7 bis 27) zeigen entsprechend dem laminaren und dem turbulenten Strömungszustande zwei typische, voneinander verschiedene Formen. Die

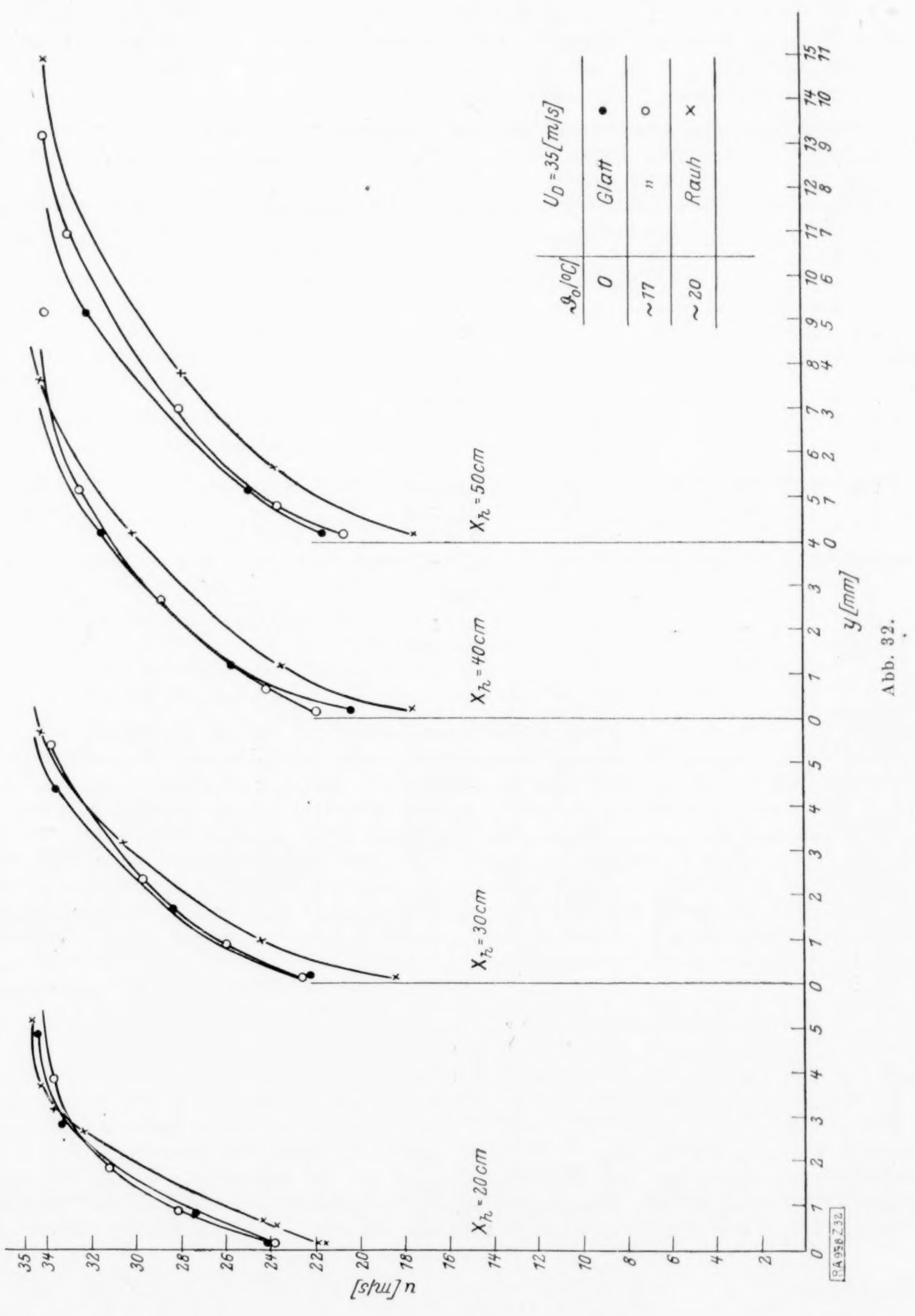


Abb. 32.

Temperaturverteilungskurven im turbulenten Bereich weisen nahe der Wand ein viel steileres Gefälle auf, als die im laminaren. Es ist bemerkenswert, daß diese beiden Arten von Temperaturverteilungen, welche zwei voneinander verschiedenen Strömungszuständen entsprechen, analog der Geschwindigkeitsverteilung längs der Platte auch gleichzeitig bestehen können. Auf Grund der Abb. 7 bis 27 haben wir in der untenstehenden Zahlentafel die Strömungsarten der einzelnen Temperaturverteilungskurven gekennzeichnet und die zugehörigen Reynoldsschen Zahlen berechnet. Interessant ist die Beobachtung, daß bei $U_D = 5$ bzw. $= 7,5$ m/s, entsprechend einer Reynoldsschen Zahl $R_e = 125\,000$ bzw. $140\,500$ gemäß unserer Vorstellung an der glatten Platte noch Laminarströmung herrscht, wogegen an der rauhen Platte die Strömung bereits turbulent geworden ist.

U_D [m/s]	x_h [cm]	$U_D\,x_h$ [m²/s]	$R_e = \frac{U_D\,x_h}{\nu}$	Strömungsart bei der Platte glatt	rauh
3	10,8	0,324	20 220	laminar	laminar
3	20	0,6	37 500	»	»
3	30	0,9	56 300	»	»
3	40	1,2	75 000	»	»
3	50	1,5	93 700	»	—
5	20	1,0	62 500	»	laminar
5	30	1,5	93 700	»	»
5	40	2,0	125 000	»	turbulent
5	50	2,5	156 200	turbulent	»
7,5	20	1,5	93 700	laminar	laminar
7,5	30	2,25	140 500	»	turbulent
7,5	40	3,0	187 500	turbulent	»
7,5	50	3,75	234 200	»	»
10	20	2,0	125 000	laminar	laminar
10	30	3,0	187 500	turbulent	turbulent
10	40	4,0	250 000	»	»
10	50	5,0	312 500	»	»
15	20	3,0	187 500	»	»
15	30	4,5	282 000	»	»
15	40	6,0	375 000	»	»
15	50	7,5	469 000	»	»
19,3	20	3,86	241 000	»	—
19,3	30	5,79	362 000	»	—
19,3	40	7,72	482 000	»	—
19,3	50	9,65	603 000	»	—
20	20	4,0	250 000	»	»
20	30	6,0	375 000	»	»
20	40	8,0	500 000	»	»
20	50	10 0	625 000	»	»
25	20	5,0	312 500	»	»
25	30	7,5	469 000	»	»
25	40	10,0	625 000	»	»
25	50	12,5	781 000	»	»
35	20	7,0	438 000	»	»
35	30	10,5	656 000	»	»
35	40	14,0	875 000	»	»
35	50	17,5	1092 000	»	»

Bei Reynoldsschen Zahlen, die zwischen etwa 100 000 und 250 000 liegen, herrscht bei derselben Geschwindigkeit der Luftströmung vorn an der Platte laminare Strömung, welche längs der Platte allmählich in turbulente übergeht.

Die entsprechenden Temperaturverteilungskurven, die für größere x_h, also hinten an der Platte, aufgenommen wurden, mithin turbulenten Charakter aufweisen, schneiden wegen ihres größeren Gefälles die Kurven für kleinere x_h (also vorn an der Platte), wo noch laminare Strömung herrscht. In diesem Falle nimmt daher die Temperatur längs einer Geraden parallel zur Platte in der Strömungsrichtung ab, an der Strecke, wo der Umschlag vom laminaren in den turbulenten Strömungszustand erfolgt.

Die Temperaturverteilungskurven wurden je für eine glatte und eine rauhe Platte aufgenommen. Letztere hatte die Rauhigkeit einer grob geschlagenen Feile.

Es zeigt sich, daß bei der rauhen Platte in der Wandnähe ein größeres Temperaturgefälle vorhanden ist als bei der glatten Platte. Dies trifft nur für größere Geschwindigkeiten (etwa von 15 m/sec aufwärts) und bis zu Entfernungen von der Wand bis ein oder zwei mm, zu. Bei größeren Entfernungen, etwa von 1 oder 2 mm ab von der Wand, kehrt sich die Sache um, so daß die entsprechende Temperaturkurve der glatten Platte ein größeres Gefälle aufweist und demnach tiefer zu liegen kommt als die der rauhen Platte. Bei Geschwindigkeiten, die unterhalb 15 m/s liegen, ist ein eindeutiger Unterschied nicht zu erkennen. Es muß hierbei noch bemerkt werden, daß gemäß der früher gemachten Annahme als Nullage des Thermoelements diejenige Stellung zu betrachten war, bei der das Thermoelement mit den äußersten Erhöhungen der rauhen Platte in inniger Berührung stand.

In denselben mit x_h bzw. x_{th} bezeichneten Ebenen wurden auch die Geschwindigkeitsverteilungen gemessen.

Die Geschwindigkeit wurde nach bekanntem Verfahren aus dem Staudruck berechnet, wobei in die Formel für die Geschwindigkeit $u = \sqrt{\frac{2\,\gamma_a h_a}{\varrho_L}}$ für die Luftdichte ϱ_L der Wert eingesetzt wurde, welcher der dort herrschenden Temperatur entspricht (Landolt-Börnstein, Phys. Chem. Tabellen). In der Formel bedeuten

u die Luftgeschwindigkeit,
γ_a das spez. Gewicht der Meßflüssigkeit,
h_a die Druckhöhe im Staurohr,
ϱ_L die Dichte der Luft in Abhängigkeit von der Temperatur.

Der Staudruck wurde mit Hilfe eines Staudruckmessers bestimmt. Als Staurohre dienten rechtwinklig umgebogene, dünn ausgezogene Glasröhrchen von 0,28 bzw. 0,34 mm Außen- und 0,15 Innendurchmesser. Der kleine Durchmesser ist notwendig, damit keine nennenswerte Störung an der Meßstelle entsteht, hat jedoch eine ziemlich lange Einstelldauer für die Manometersäule, etwa 5—10 min zur Folge. Unterhalb 10 m/sec Geschwindigkeit der ungestörten Strömung war die Messung zu ungenau. Die Nullage des Staurohres an der Wand war durch Berührung zwischen Meßrohr und Platte festgelegt. Die Ablesung in dieser Lage blieb unberücksichtigt. Die Nullage wurde mit Hilfe einer Lupe kontrolliert. Als y-Koordinate der Meßstelle gilt die Entfernung der Rohrachse von der Wand. Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungskurven wurden bei gleichem U_D und bei derselben Uebertemperatur ϑ_0 aufgenommen.

Um den Einfluß der Heizung auf das Geschwindigkeitsfeld zu erkennen, hatten wir die Geschwindigkeitsverteilung auch bei ungeheizter Platte ermittelt. Die entsprechenden Kurven sind in den Abb. 28 bis 32 dargestellt. Wie aus diesen hervorgeht, ist der Unterschied zwischen je zwei entsprechenden Kurven nicht erheblich, etwa 2 bis 3 vH. Dies entspricht der Annahme der Latzkoschen Arbeit (s. a. O. S. 37), daß der Einfluß der Temperatur bei verhältnismäßig geringer Uebertemperatur auf das Geschwindigkeitsfeld zu vernachlässigen ist. In denselben Abbildungen sind auch die entsprechenden Geschwindigkeitskurven für die rauhe Platte eingetragen. Sie liegen erwartungsgemäß tiefer als die bei der glatten Platte, da der Widerstand der rauhen Platte größer ist und dementsprechend die Geschwindigkeit stärker vermindert wird.

(Schluß folgt.)

Versuche zur Ermittlung der Vertikalspannungen beim Walzvorgang.[1]

Von **KARL HUBER** in Witkowitz, Č. S. R.

1. Einleitung. Im folgenden sei kurz die v. Kármánsche Theorie des breitungslosen Walzvorganges wiedergegeben.

Die v. Kármánsche Theorie ist auf 2 Grundgleichungen aufgebaut, und zwar 1. auf der Gleichgewichtsbedingung der horizontalen inneren Kräfte, die auf einen Streifen dx des Walzgutes (Volumelement) wirken und 2. auf der Plastizitätsgleichung.

Wird mit q der bezogene Normaldruck auf die Walzenoberfläche bezeichnet, die über den ganzen Querschnitt als konstant angenommene Horizontalspannung mit p,

mit r der Halbmesser der Walze,
» h_1' die halbe Dicke des Walzgutes vor dem Walzen,
» h_2' » » » » nach » »,
» x die Koordinate in der Walzrichtung, positiv gemessen gegen die Fortschreitungsrichtung des Walzgutes,
» φ die Winkelkoordinate,
» φ_{max} der Greifwinkel,
» μ der Reibungskoeffizient zwischen Walze und Walzgut,
» ω die Drehgeschwindigkeit der Walzen,

so lautet die Gleichgewichtsbedingung für das Volumelement in der x-Achse

$$\frac{d}{dx}(p\,h') = q\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Es ist $\sin\varphi = x/r$; für $\cos\varphi$ wird angenähert $\cos\varphi \sim 1$ gesetzt, eine weitere Näherungsgleichung ist $x^2 \sim 2\,r\cdot r\,(1-\cos\varphi)$, was besagt, daß x die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Hypotenusenabschnitten im rechtwinkeligen $\Delta\,ABC$ ist. Abb. 1.

Es ist daher $h' = h_2' + r\,(1-\cos\varphi) \simeq h_2' + \frac{x^2}{2\,r}$; ferner wird $\frac{d\,h'}{d\,x} = \operatorname{tg}\varphi \simeq \sin\varphi = x/r$ gesetzt. Damit folgt (1) vereinfacht

$$h'\frac{d\,p}{d\,x} + p\,\frac{x}{r} = q\left(\frac{x}{r} - \mu\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1^*).$$

Die 2. Gleichung ist die Fließbedingung gemäß der Plastizitätstheorie. Sie besagt, daß das Fließen des Werkstoffes eintritt, wenn die Differenz zweier Hauptspannungen den doppelten Wert von dessen Schubfestigkeit erreicht, d. h.

$$\sigma_y - \sigma_x = 2\,\tau_{max} = k$$

ist [2]).

[1]) Die Anregung zur vorliegenden Untersuchung erhielt ich gelegentlich einer Besprechung, die ich mit den Herren Prof. Dr. K. Wolf-Wien und Prof. Dr. P. Ludwik-Wien zum Gegenstand der Theorie des Walzvorganges hatte. Die Herren verwiesen mich auf eine damals noch nicht veröffentlichte Arbeit Prof. Dr. v. Kármáns, die dann im April 1925 in dieser Zeitschrift als »Beitrag zur Theorie des Walzvorganges« erschienen ist. Die mir gegebene Weisung ging dahin, die Theorie durch den Versuch zu überprüfen.

Die Ueberprüfung schien mir durchführbar, da das Eisenwerk Witkowitz ein eigenes Versuchswalzwerk mit den zugehörigen meßtechnischen Einrichtungen hat, auf dem, losgelöst von den normalen Betriebsverhältnissen in der Hütte, unter weitgehender Beseitigung der dort auftretenden störenden Einflüsse die Versuche gemacht werden konnten.

Ich spreche hiermit den Herren Professoren Dr. Wolf und Dr. Ludwik für die Anregung und dem Eisenwerk Witkowitz für die Bewilligung zur Durchführung der Versuche meinen besten Dank aus.

Nach Fertigstellung meiner Arbeit kam die im April 1926 in dieser Zeitschrift veröffentlichte Arbeit von D. Dresden—Den Haag »Zur Theorie des Walzvorganges« zu meiner Kenntnis. Der Dresdensche Aufsatz für die Plastizitätsgleichung findet durch die Versuche seine Bestätigung.

[2]) Diese Gleichung folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den ebenen Spannungszustand an einem 3seitigen Prisma aus der Grundgleichung $\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau\cos 2\varphi$; der max Wert der Schub-

v. Kármán identifiziert in erster Annäherung p und q mit den Hauptspannungen, womit die Plastizitätsgleichung

$$q - p = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

lautet [1]).

k ist im wesentlichen von der Temperatur und der Formänderungsgeschwindigkeit abhängig. Für ein und denselben Werkstoff wird k bei gleichbleibender Temperatur konstant angenommen.

Durch Einsetzen von (2) in (1) folgt die Differentialgleichung

$$h' \frac{d p}{d x} + \mu p = k \left(\frac{x}{r} - \mu \right)$$

bzw.

$$\frac{d p}{d x} + \frac{\mu}{h_2' + \frac{x^2}{2 r}} \cdot p = \frac{k}{h_2' + \frac{x^2}{2 r}} \left(\frac{x}{r} - \mu \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung, weil sie in bezug auf die zu bestimmende Funktion p und ihren Differentialquotienten vom ersten Grad ist und auch deren Produkt nicht enthält. Die übliche Schreibweise dieser Differentialgleichung ist

$$\frac{d y}{d x} + P y = Q.$$

Im vorliegenden Fall ist

$$y = p, \quad P = \frac{\mu}{h_2' + \frac{x^2}{2 r}} = \frac{\mu}{h'}, \quad Q = \frac{k}{h_2' + \frac{x^2}{2 r}} \left(\frac{x}{r} - \mu \right) = \frac{k}{h'} \left(\frac{x}{r} - \mu \right).$$

Die Lösung der Differentialgleichung in allgemeiner Form lautet

$$y = e^{-\int P d x} \{ C + \int Q e^{\int P d x} d x \}$$

und im besonderen Fall

$$p = e^{-\int \frac{\mu}{h_2' + x^2/2 r} d x} \left\{ C + \int \frac{k}{h_2' + x^2/2 r} \left(\frac{x}{r} - \mu \right) \cdot e^{\int \frac{\mu}{h_2' + x^2/2 r} d x} \cdot d x \right\} \quad . \quad . \quad (4).$$

Die Gl. (4) enthält nur eine Integrationskonstante. Es sind jedoch 2 Grenzbedingungen zu erfüllen, da für $x = a$ an der Eintrittsstelle und für $x = 0$ an der Austrittsstelle p Null sein muß. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn p aus 2 Kurvenästen besteht, die man erhält, wenn man in die Gleichung einmal den Reibungskoeffizienten μ positiv, das andere Mal negativ einsetzt. Der Verlauf der p, die mit $+\mu$ gerechnet werden, entspricht dem Walzstab von der Eintrittsstelle bis zum Haftpunkt, d. i. jener Punkt H, in dem das Walzgut die gleiche Geschwindigkeit hat wie der Umfang der Walzen. Der Verlauf der p, die mit $-\mu$ gerechnet werden, entspricht dem Walzstab von der Austrittsstelle bis zum Haftpunkt. Der Haftpunkt ist der dem Schnittpunkt der beiden p-Aeste zugehörige Punkt am Walzenumfang. Siehe Abb. 1. Den zugehörigen Winkel γ bezeichnet v. Kármán als den Greifwinkel schlechthin. Es ist daher $\mu = \operatorname{tg} \gamma$

---

spannungskomponente τ' wird durch Differentiation nach dem Schnittwinkel φ und Nullsetzung des Ausdruckes ermittelt.

$$\frac{d \tau'}{d \varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \cos 2 \varphi - 2 \tau \sin 2 \varphi.$$

Dieser Ausdruck wird für $\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \tau}$ Null. Es ist daher $\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \operatorname{tg} 2 \varphi}$. Die größte Schubspannung erhält man für die Schnittrichtung $\varphi = 45^0$. Dann ist $2 \tau = \sigma_x - \sigma_y$ oder, wenn die Richtung von τ geändert wird,

$$2 \tau = \sigma_y - \sigma_x.$$

[1]) In den nachfolgenden Abschnitten wird p mit σ_x und q mit n bezeichnet. Es ist $\sigma_y = n (1 \pm \mu \operatorname{tg} \varphi)$; siehe Abschn. **5**. In der Verwendung von $q = n$ statt σ_y besteht bereits eine Annäherung, die noch durch die zweite, daß die Differenz der beiden Hauptspannungen konstant sei, erweitert wird. — Siehe den Dresdenschen Ansatz im Abschn. **4**, Gl. (2*), wobei k nicht konstant angenommen wird. — Auch v. Kármán kündigt für seine erweiterte Theorie einen anderen Ansatz an.

oder $\gamma = \operatorname{arctg} \mu \simeq \mu$. Der effektive Greifwinkel, d. i. der Winkel an der Eintrittsstelle, ist φ_{max}.

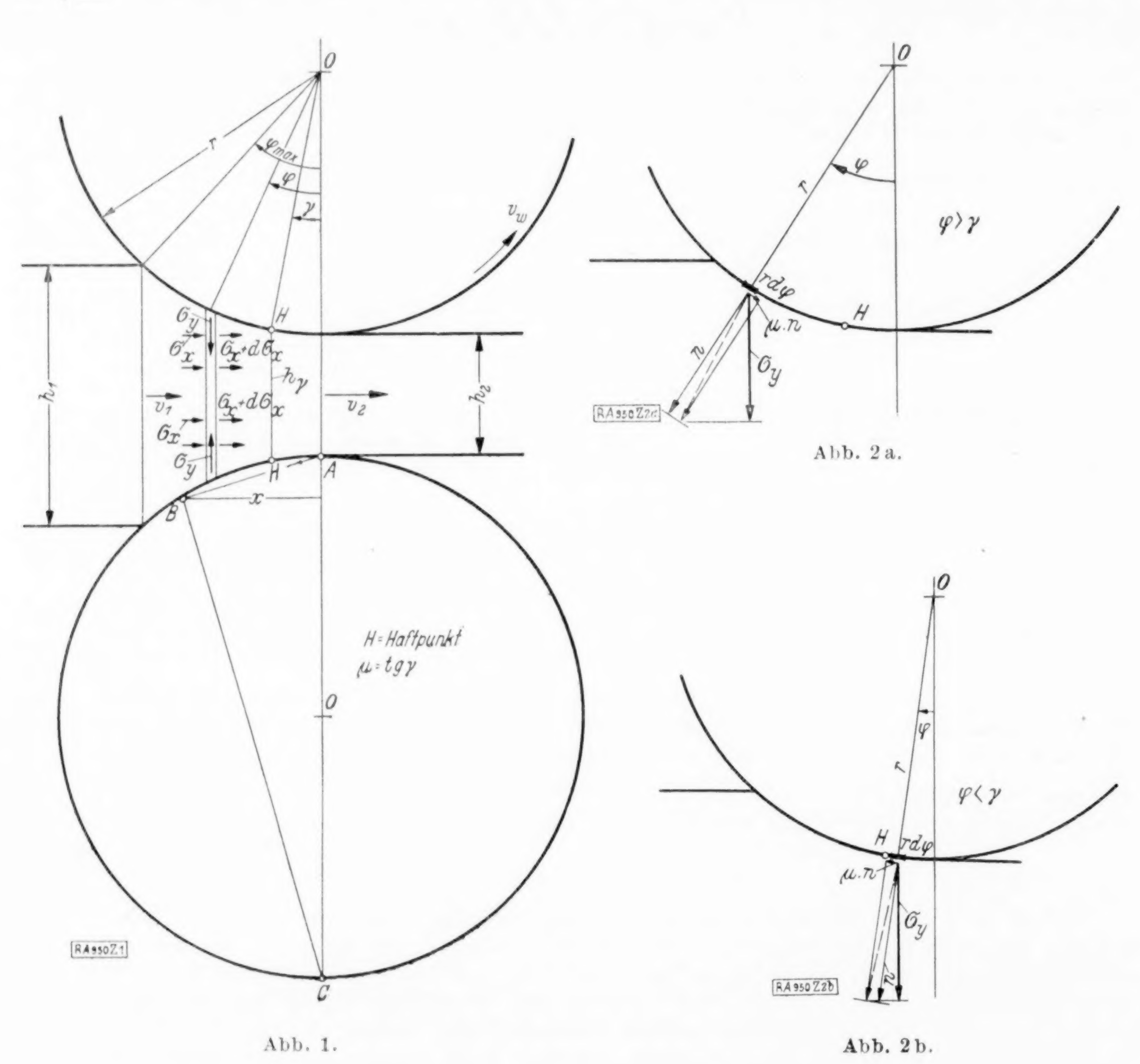


Abb. 1.

Abb. 2a.

Abb. 2b.

v. Kármán ermittelt alsdann den Wirkungsgrad beim Walzvorgang aus dem Verhältnis $\frac{L_{nutz}}{L_0} = \eta$. Hierin bedeutet L_{nutz} die Formänderungsarbeit je Zeiteinheit für die eine ober der x-Achse liegende Stabhälfte, auch Nutzleistung genannt. Sie ist

$$L_{nutz} = k\, V \lg\mathrm{nat} \frac{h_1'}{h_2'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

wobei $V = r\, \omega\, h_0'$ bedeutet, wenn h_0' die zum Winkel γ zugehörige halbe Stabhöhe ist.

Die wirklich aufgewandte Leistung L_0 für die eine Stabhälfte ist jedoch

$$L_0 = \int_0^{\varphi_{max}} \mu\, q\, r^2\, \omega\, d\varphi = v_w \int_0^a \mu\, q\, d x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Sie müßte eigentlich bei Berücksichtigung des Voreilens lauten:

$$L_0 = r^2\, \omega \left\{ \int_\gamma^{\varphi_{max}} \mu\, q\, d\varphi - \int_0^\gamma \mu\, q\, d\varphi \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6^*).$$

Im folgenden sollen die Versuche beschrieben werden. Es war von Anfang klar, daß meßtechnisch nur der Verlauf der Vertikalspannungen ermittelt werden konnte, wie er, im Augenblick des Erfassens des Stabes bei φ_{max} beginnend und bis zum Austritt von dessen vorderem Ende bei $\varphi = 0$ endend, sich darstellt. Die Messung der Vertikalspannungen im Stabteil zwischen seinen beiden Enden ist undurchführbar. Es konnte jedoch aus dem Bestehen des horizontalen Verlaufes der Gesamtdruckkurve P, nachdem der erste Stabteil das ganze Umformungsgebiet passiert hatte, der Schluß gezogen werden, daß sich der Verlauf der Vertikalspannungen für den Stabteil zwischen seinen beiden Enden nicht wesentlich anders verhält wie an seinem anzustechenden Ende.

2. Versuche zur Ermittlung der Vertikalspannungen beim Walzen. a) Allgemeines. Zur Ermittlung des Verlaufes der Vertikalspannungen σ_y beim Erfassen des Stabes zwischen glatten Walzen (Hartguß) wurde an walzwarmen Eisenstäben und an Bleikörpern auf einem ⌀ 250 mm Versuchswalzwerk die Vertikaldruckkurve P aufgenommen.

Die Messung erfolgte mittels zweier Meßdosen. Der Durchmesser des Druckkolbens jeder dieser Meßdosen betrug 100 mm, entsprechend 78,5 cm² Druckfläche. Je eine Meßdose war zwischen der Oberhälfte des geteilten Lagers der Oberwalze und der Druckspindel über jedem Zapfen der Walze eingebaut. Die Aufschreibung des Druckes erfolgte durch je ein Schreibmanometer (Bourdonfeder), das mit der Meßdose durch ein mit Glyzerin gefülltes Kupferrohr in Verbindung war, für jeden Zapfen getrennt[1]). Da der mit

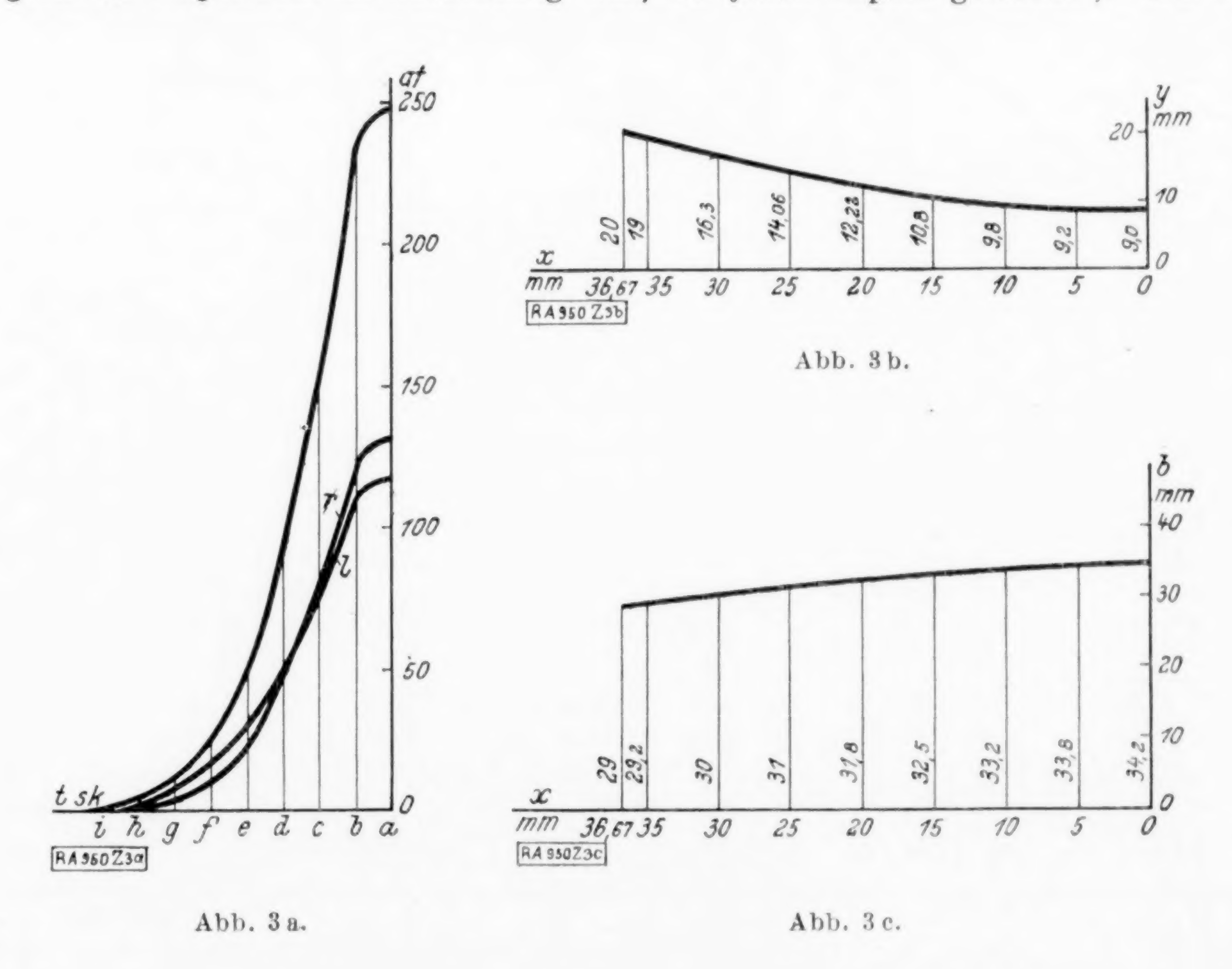


Abb. 3a. Abb. 3b. Abb. 3c.

der Bourdonfeder verbundene Schreibstift an einem Hebel angebracht ist, der sich um einen fixen Punkt dreht, sind die Ordinaten der von der Feder geschriebenen P-Kurve Kreisbögen. Die Trommel des Schreibapparates, auf welcher der Registrierstreifen aufgespannt war, wurde durch ein Uhrwerk betätigt.

Um die P-Kurve in ihrem analytischen Verlauf von $P = 0$ bis P_{max} geschrieben zu erhalten, war es notwendig, mit sehr kleiner Geschwindigkeit zu walzen und die Schreibtrommel mit der größtmöglichen Geschwindigkeit laufen zu lassen. Die Umfangs-

[1]) Beschreibung siehe Stahl und Eisen 1910, Nr. 43 und 44, Puppe, Versuche über Walzdrücke an einem Blockwalzwerk.

geschwindigkeit der Walzen bewegte sich bei den Versuchen zwischen $v_w = 4,1$ bis 11,1 mm/sek, die Geschwindigkeit des Registrierstreifens war 8,33 mm/sek, d. h. er legte in 0,12 sek einen mm zurück.

Von den insgesamt aufgenommenen 98 Druckversuchen wurden 18 ausgewertet.

Die von der Schreibfeder direkt aufgeschriebene Druck-Zeitkurve, deren Ordinaten Kreisbögen sind, wurde auf rechtwinklige Koordinaten umgezeichnet. Die rektifizierten Kurven für beide Zapfen superponiert, ergab die $P = f(t)$-Kurve. Siehe Abb. 3a, Vers. Nr. 61. Die Punkte a, b, c usw. sind Zeitpunkte auf dem Registrierstreifen.

Aus den Ordinaten y des Walzstabes — s. Abb. 3 b — und den zugehörigen, am Walzstab gemessenen Breiten — s. Abb. 3 c — wurden die Querschnitte ermittelt, ferner aus der Umdrehungszahl n_w der Walzen die Austrittsgeschwindigkeit v_e des Stabes, d. h. es wurde das Voreilen nicht gemessen und für die nun folgende Betrachtung — und nur für diese — die Austrittsgeschwindigkeit des Stabes der Walzenumfangsgeschwindigkeit

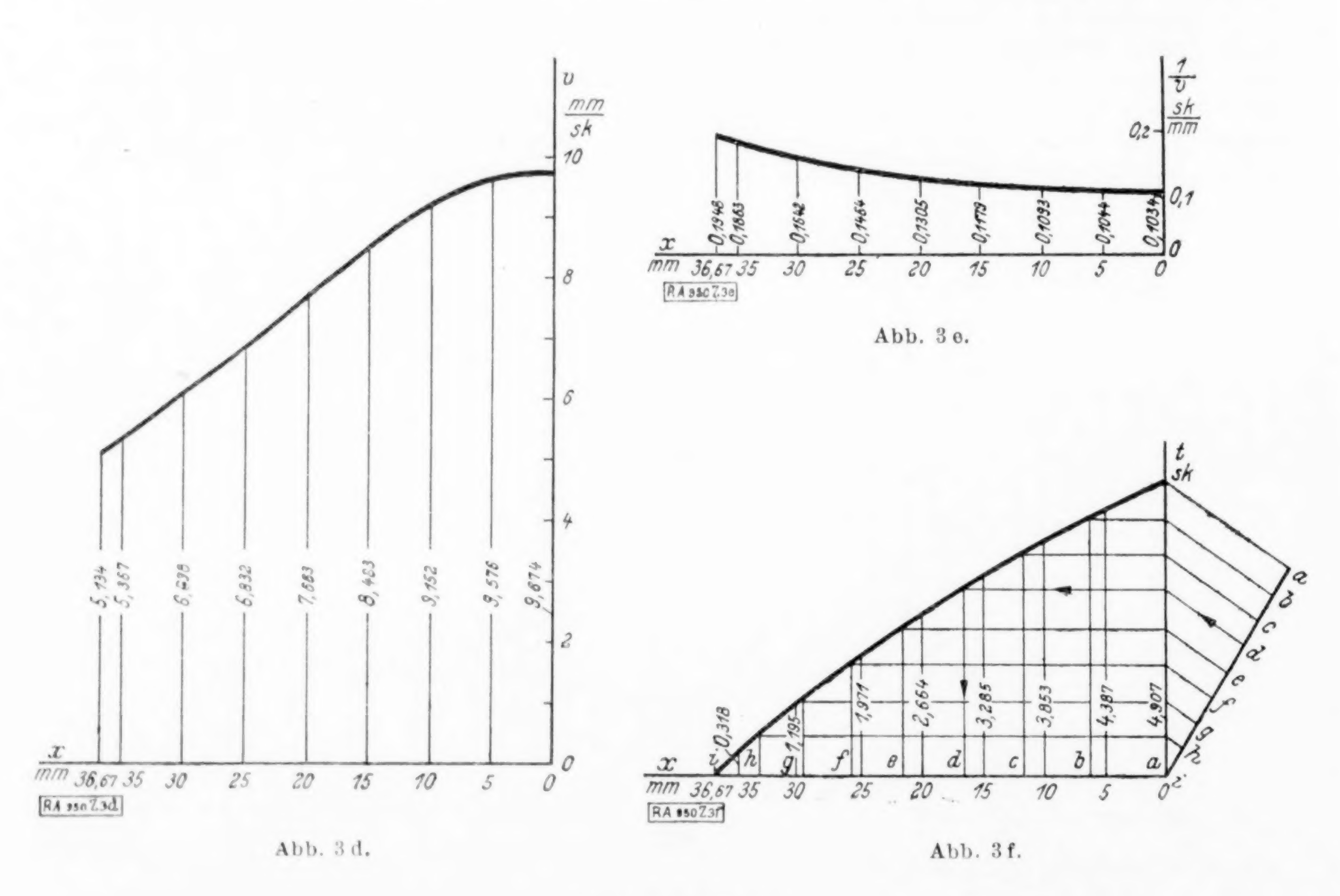


Abb. 3 d.

Abb. 3 e.

Abb. 3 f.

Zahlentafel 1.

V.-Nr.	x mm	$2\,y \cdot b = q$ mm × mm	mm²	C mm³/sek.	v mm/s.	$\frac{1}{v}$ sek./mm	$\frac{\frac{1}{v_{n-1}} + \frac{1}{v_n}}{2}$ sek./mm	Δx mm	Δt sek.	$\sum_0^n \Delta t$ sek.
	36,67	20 × 29	580,—		5.134	0,1948	0,1906	1,67	0,3183	0,3183
	35	19 × 29,2	554,80		5.367	0,1863	0,1753	5	0,8765	1,1948
	30	16,3 × 30	489,—		6,089	0,1642	0,1553	5	0,7765	1,9713
	25	14,06 × 31	435,86		6,832	0,1464	0,1385	5	0,6925	2,6638
61	20	12,22 × 31,8	388,60	2977,6572	7,663	0,1305	0,1242	5	0,6210	3,2848
	15	10,8 × 32,5	351,—		8,483	0,1179	0,1136	5	0,5680	3,8528
	10	9,8 × 33,2	325,36		9,152	0,1093	0,1069	5	0,5345	4,3873
	5	9,2 × 33,8	310,96		9,576	0,1044	0,1039	5	0,5195	4,9068
	0	9,0 × 34,2	307,80		9,674	0,1034				

gleichgesetzt [1]). Demnach konnte aus der Kontinuitätsgleichung die mittlere Geschwindigkeit in jedem Querschnitt gerechnet worden. Kurve der $v = f(x)$ — siehe Abb. 3d und Zahlentafel 1.

Aus der v-Kurve wurde mit $dt = \frac{dx}{v}$ die Fließzeit bestimmt. — Siehe Abb. 3e. — Damit erscheint $t = \varphi(x)$ dargestellt. — Siehe Abb. 3f und Zahlentafel 1.

Nunmehr wurde $P = f[\varphi(x)] = \psi(x)$ aufgezeichnet; s. Abb. 3g, Druck-Wegkurve.

Das Gewicht der Oberwalze (145 kg) und der beiden Meßdosen (2×12 kg) wurde bei der Auswertung der P-Kurve nicht berücksichtigt. Vor jedem Versuch wurde für jedes Lager die Nullinie des Druckes geschrieben.

Die Durchflußzeit T konnte direkt aus dem Druckdiagramm als Abszissendifferenz des Beginnes und des Endes der P Kurve (horizontale Tangenten) abgelesen werden.

Aus der P-Kurve, die eine Summenkurve ist, wurde die Differentialkurve $\frac{dP}{dx}$ ermittelt und aus dieser durch Division durch die zugehörigen Breiten die Kurve der Vertikalspannungen

$\sigma_y = \frac{dP}{b \cdot dx}$. Siehe Abb. 3h.

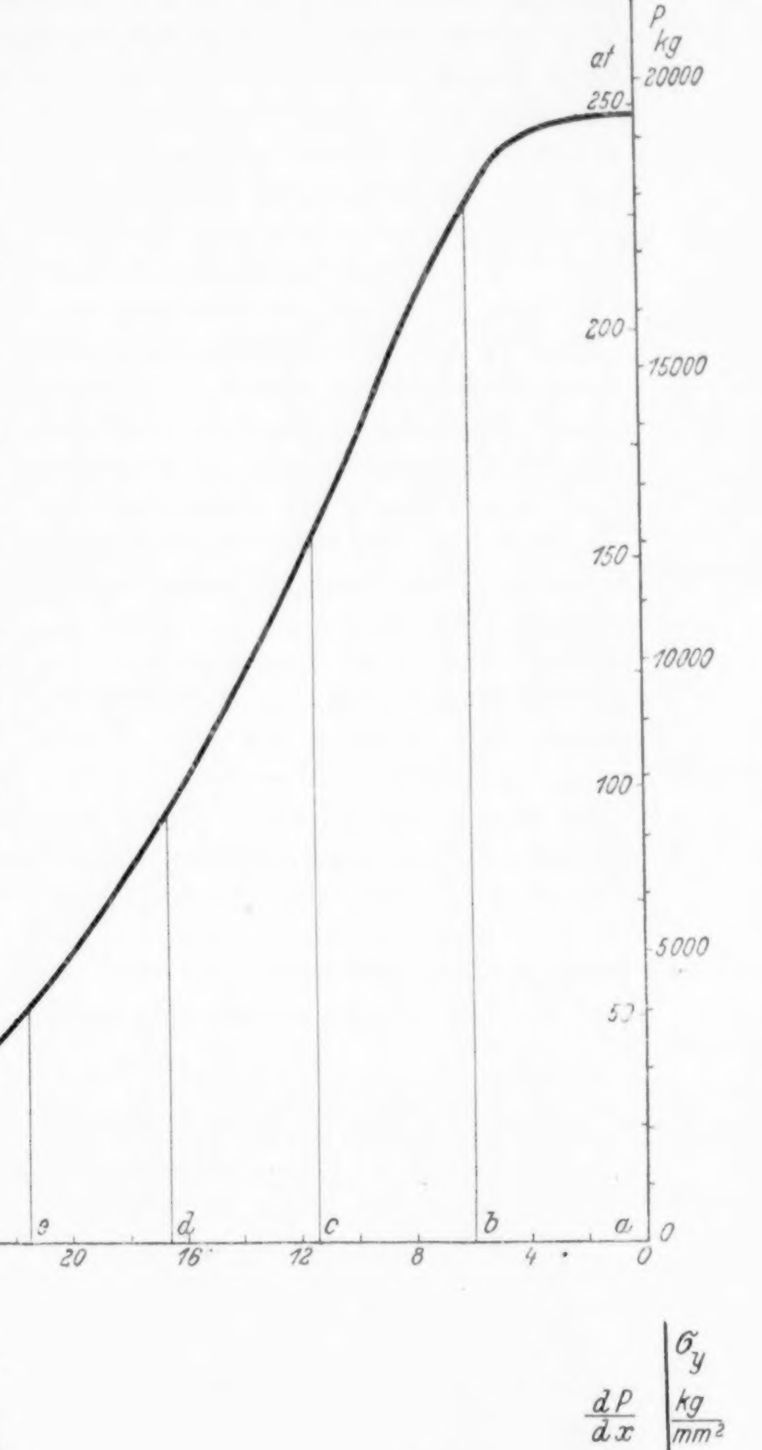


Abb. 3g.

Sämtliche σ_y, sowohl die für Eisen als auch die für Blei, beginnen mit einem Wert, der über Null liegt, steigen alsdann bis zu einem Höchstwert und erreichen an der Austrittsstelle $x = 0$ den Wert Null.

Das σ_y an der Eintrittsstelle wurde als die Quetschzahl k angesprochen, d. i. derjenige bezogene Druck, bei welchem die erste bleibende Formänderung eintritt. Daß das k sich aus der P-Kurve nicht auch an der Austrittsstelle ergibt — wie dies auch der Plastizitätsgleichung nach v. Kármán entsprechen würde — dürfte sich damit erklären, daß dort bei immer kleiner werdendem Zentriwinkel ein

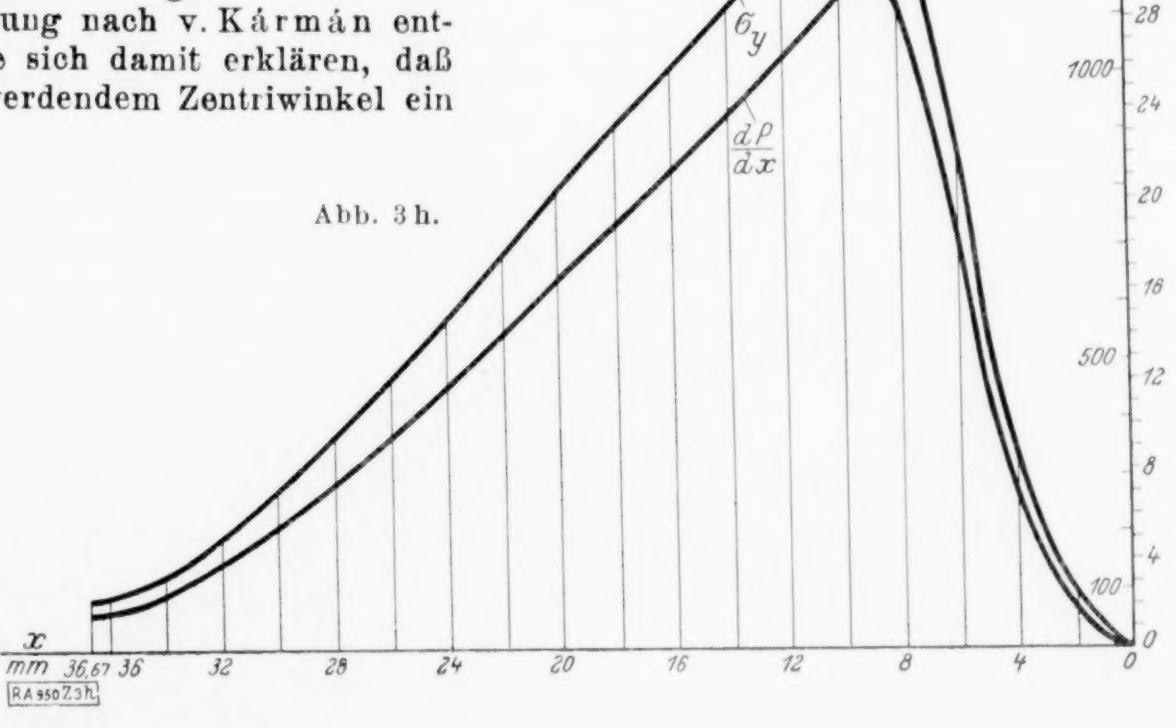
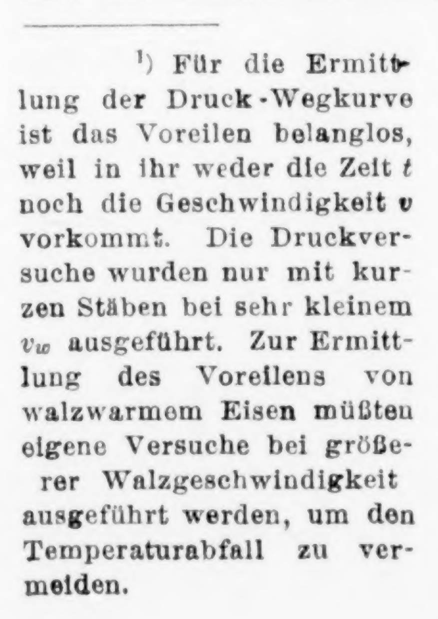


Abb. 3h.


[1]) Für die Ermittlung der Druck-Wegkurve ist das Voreilen belanglos, weil in ihr weder die Zeit t noch die Geschwindigkeit v vorkommt. Die Druckversuche wurden nur mit kurzen Stäben bei sehr kleinem v_w ausgeführt. Zur Ermittlung des Voreilens von walzwarmem Eisen müßten eigene Versuche bei größerer Walzgeschwindigkeit ausgeführt werden, um den Temperaturabfall zu vermeiden.

stetiger Uebergang zu $\varphi = 0$ stattfindet und damit die Höhenabnahme des Stabes in dem Teil unmittelbar vor der Austrittsstelle sehr gering ist (elastische Formänderung), während beim Eintritt unter dem Greifwinkel φ_{max} mit der beim Fasseu des Walzgutes sich bildenden Greifkante bei größter Höhenabnahme momentan die plastische Umformung beginnt, gegen die die sehr kleine elastische gänzlich verschwindet. — Der Abfall der σ_y zum Nullwert an der Austrittsstelle stimmt jedoch mit dem Dresdenschen Ansatz für die Plastizitätsgleichung überein; siehe im Abschn. **4**.

Die Spannungshügel, welche bei den Warmwalzversuchen zwischen σ_y an der Eintrittsstelle und dem Höchstwert von σ_y auftreten (Abb. 4), sind lediglich auf Abkühlungserscheinungen des Stabes zurückzuführen; sie entstehen dadurch, daß der von den Walzen erfaßte Stab, welcher an deren glatten Oberfläche nicht sofort gegriffen hat, was insbesondere bei großer Höhenabnahme der Fall ist, durch die Walzen an der Greifkante und unmittelbar dahinter örtlich abgekühlt wurde. Wenn nun dieser kälter gewordene Stabteil weiter zwischen die Walzen kam, so war der für ihn aufzuwendende Formänderungsdruck größer als wenn der Stab nicht abgekühlt worden wäre. Bei den warm gewalzten Stäben mit kleiner Höhenabnahme, bei denen ein sofortiges Fassen erfolgte und die Walzen nicht Zeit hatten, die Greifkante abzukühlen, trat diese Erscheinung nicht auf; desgleichen auch nicht bei Blei und hier auch dann nicht, wenn mit sehr großer Höhenabnahme gewalzt wurde; siehe Abb. 5.

Abb. 4.

Aus dem Verlauf der σ_y folgt:

1. Die Vertikalspannung am Greifwinkel ist die »Quetschzahl«, d. i. diejenige Spannung, bei der die erste bleibende Formänderung eintritt — σ_y^k —.
2. Die Vertikalspannungen im ganzen Umformungsgebiet verteilen sich derart, daß sie von der Quetschzahl bis zu einem Spannungshöchstwert steigen und von diesem bis zum Nullwert an der Austrittsstelle fallen.

Abb. 5.

Damit wäre der von v. Kármán theoretisch ermittelte Spannungsverlauf der $\sigma_y \doteq q$ prinzipiell durch den Versuch bestätigt. — Die Unstetigkeit der v. Kármánschen Kurve im Höchstpunkt und die Stetigkeit der »Versuchskurve« an dieser Stelle beeinträchtigt weder die Theorie noch das Versuchsergebnis, da die Theorie einerseits lediglich die Lösung der Differentialgleichung wiedergibt, die zwei Bedingungen zu erfüllen hat (zwei Kurvenäste) und der Versuch andererseits alle Wahrscheinlichkeit für sich hat, daß der Walzvorgang im ganzen Umformungsgebiet stetig ist.

3. Die aus der σ_y-Kurve zu ermittelnde mittlere Spannung σ_y^{Mittel} ist derjenige Wert, der bis nun in der Walzwerksliteratur als k-Wert angesprochen wurde.

Wie aus den Puppeschen Versuchen zur Ermittlung des Kraftbedarfes, bzw. aus vielen von uns selbst durchgefürten Walzdruckmessungen und auch aus vorliegenden Versuchen folgt, ist — je nach Temperatur und Höhenabnahme und wohl auch Walzgeschwindigkeit — σ_y^{Mittel} bedeutend größer als 2 bis 6 kg/mm², mit welchem Werte zumeist gerechnet wurde. Siehe Zahlentafel 6.

4. Der zu $\sigma_y^{\max}$ gehörige Winkel γ ist der Greifwinkel schlechthin; von hier ab beginnt das Voreilen. Siehe Zahlentafel 3.

5. Aus der σ_y-Kurve im Verein mit der Stabbreite, bzw. aus der $\frac{dP}{dx}$-Kurve ist der Angriffspunkt der Resultierenden am Walzenumfang zu ermitteln. (Schwerpunktlage der Fläche $\int\limits_0^P \frac{dP}{dx}\,dx$)

Zahlentafel 2.

V.-Nr.	Werkstoff	t °C	h_1 mm	b_1 mm	h_2 mm	b_2 mm	Δh mm	Δb mm	$\frac{\Delta h}{h_1}$ %	$\frac{\Delta b}{b_1}$ %	σ_y^k kg/mm²	max σ_y kg/mm²	P kg
59	Eisen	1230	20,0	29,0	11,6	32,0	8,4	3,0	42,00	10,34	3,045	25,690	12413
60	»	1220	20,0	29,0	9,6	34,0	10,4	5,0	52,00	17,24	2,234	46,456	20996
61	»	1250	20,0	29,0	9,0	34,2	11,0	5,2	55,00	17,93	2,301	35,045	19400
62	»	1260	20,0	29,0	8,5	35,7	11,5	6,7	57,50	23,10	2,708	56,119	20700
63	»	1260	20,0	29,0	8,3	35,5	11,7	6,5	58,50	22,41	2,030	40,001	20200
64	»	1260	20,0	29,0	7,5	36,0	12,5	7,0	62,50	24,14	2,030	45,181	23500
73	»	1230	20,0	48,5	17,0	49,0	3,0	0,5	15,00	1,03	1,214	12,264	6280
74	»	1010	20,0	48,5	17,0	49,0	3,0	0,5	15,00	1,03	2,630	24,893	13050
75	»	ca. 930	20,0	48,5	17,0	49,0	3,0	0,5	15,00	1,03	2,226	27,126	17270
76	»	» 850	20,0	48,5	17,0	49.0	3,0	0,5	15,00	1,03	4,552 25,817	33,860	17957
77	»	» 700	20,0	48.5	17,0	49,0	3,0	0,5	15,00	1,03	3,035 69,787	79,479	26750
25	Blei		21,0	49,7	9,0	54,5	12,0	4,8	57,14	9,66	0,513	5,820	6574
26	»		9,0	54,5	4,5	57,0	4,5	2,5	50,00	4,59	0,720	12,350	6623
27	»		4,5	57,0	2,0	60,7	2,5	3,7	55,55	6,49	1,205	16,786	5789
28	»		2.0	60,7	1,0	62,0	1,0	1,3	50,00	2,14	1,293	17,797	4317
29	»		20,8	49,0	7,9	55,0	12,9	6,0	62,01	12,24	0,521	6,739	7163
30	»		7,9	55,0	2,3	62,0	5,6	7,0	70,88	12,73	0,749	15,612	10450

Zahlentafel 3.

V.-Nr.	$2r+h_2$ mm	x mm	tg γ —	$\frac{2x}{\text{tg}\,\gamma}$ mm	h_γ mm	h_2 mm	v_w mm/sek.	v_2 mm/sek.	$100\,\frac{v_2 - v_w}{v_w}$ %	$\frac{h_\gamma}{h_2}$ —
59	261,6	11	0,08835	249,01	12,59	11,6	6,809	7,390	8,53	1,0853
61	259,0	9	0,07218	249,38	9,62	9,0	9,674	10,341	6,89	1,0689
64	257,5	9	0,07218	249,38	8,12	7,5	11,098	12,016	8,27	1,0827
29	257,9	15	0,12078	248,39	9,51	7,9	10,115	12,176	20,38	1,2038

Höhe am Haftpunkt $h_\gamma = (2\,r + h_2) - \frac{2\,x}{\text{tg}\,\gamma}$.

b) Bemerkungen zu den Versuchen. Aus den Versuchen wurden drei Gruppen herausgegriffen, und zwar siehe Zahlentafel 2.

1. Versuche Nr. 59 bis 64; Eisen; steigende Höhenabnahme bei gleichbleibender Temperatur. (Der Temperaturbereich schwankte zwischen 1220 und 1260° C.)

2. Versuche Nr. 73 bis 77; Eisen; gleiche Höhenabnahme bei fallender Temperatur. Temperaturbereich von 1230° bis ca. 700° C.

3. α) Versuche Nr. 25 bis 28; Blei; Stufenwalzung. Ein 21 mm starker Bleistab wurde auf 9 mm ausgewalzt; dieser 9 mm starke auf 4,5 mm, dieser auf 2 mm und dann weiter bis auf 1 mm.

β) Versuche Nr. 29 und 30; Blei; ein 20,8 mm starker Bleistab wurde auf 7,9 mm und dieser auf 2,3 mm ausgewalzt.

Die Temperaturen wurden mit einem Wanner Pyrometer unmittelbar vor den Walzen gemessen.

Zu 1. Bei den Versuchen Nr. 59 und 60 sind die durch die Abkühlung der Kanten des Stabes beim Greifen entstandenen Spannungshügel deutlich sichtbar, ebenso bei Versuch Nr. 64, wenn auch hier bedeutend schwächer. Bei den Versuchen Nr. 61 bis 63 sind diese Abkühlungserscheinungen nicht aufgetreten, weil diese Stäbe schneller gegriffen haben. Die σ_y^k bewegen sich zwischen 2 und 3 kg/mm². Bei Versuch Nr. 62 ist trotz der hohen Temperatur von 1260° $\sigma_y^{\max} = 56{,}12$ kg/mm². Hier wäre im Hinblick auf die Versuche Nr. 63 und 64 ein kleinerer Wert zu erwarten gewesen; es ist jedoch möglich, daß die Temperatur im Stabinnern niedriger war als an der Oberfläche.

Zu 2. Bei den Versuchen Nr. 74 bis 77 sind die Spannungshügel noch schärfer ausgeprägt, was auf die viel niedrigeren Temperaturen zurückzuführen ist, bei denen eine noch raschere Abkühlung eintritt. Bei den Versuchen Nr. 75 bis 77 ist das sehr rasche Ansteigen der Spannungen sofort nach Erfassen des Stabes auffallend, insbesondere bei Versuch Nr. 77, bei welchem die Spannung unmittelbar nach dem Erfassen auf 70 kg/mm² ansteigt. Es wird demnach das wirkliche σ_y^k bei den Versuchen Nr. 75 bis 77 wahrscheinlich einen Wert haben, der zwischen σ_y^k und dem Höchstwert des Spannungshügels liegt.

Zu 3. Bei den Bleiwalzversuchen treten nirgends die Spannungshügel auf. Bemerkenswert ist, daß $\sigma_y^{\max}$ von der Austrittsstelle weiter entfernt ist als bei Eisen. Daraus folgt, daß der Greifwinkel schlechthin (γ) zwischen Blei und Hartgußwalzen größer ist als der zwischen warmem Eisen und Hartgußwalzen und daß demnach das Voreilen von Blei ebenfalls größer ist als das von warmem Eisen.

Das systematische Anwachsen der σ_y^k in der Gruppe α) von 0,513 auf 1,293 kg/mm², bzw. in Gruppe β) von 0,521 auf 0,749 kg/mm² zeigt das beim Stufenwalzen auftretende Kalthärten.

In den Zeichnungen ist nur der Versuch Nr. 29 dargestellt.

3. Mittlere Durchflußzeit eines Punktes durch das Umformungsgebiet bei breitungslosem Walzen. Es ist $y = r(1 - \cos\varphi) + \frac{h_2}{2}$. Das sekundlich durch einen Querschnitt fließende Volumen (Stabbreite 1 gesetzt) ist $C = 2yv_w$ und daher

$$v = \frac{C}{2r(1-\cos\varphi) + h_2}.$$

Mit $x = r\sin\varphi$ und $v = \frac{dx}{dt} = \frac{r\cos\varphi\, d\varphi}{dt}$ wird

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{dx}{v} = \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{r\cos\varphi\,[2r(1-\cos\varphi)+h_2]}{C}\, d\varphi = \frac{r}{C}\int_0^{\varphi_{\max}} [(2r+h_2)\cos\varphi - 2r\cos^2\varphi]\, d\varphi$$

$$= \frac{r}{C}\left[(2r+h_2)\sin\varphi_{\max} - 2r\left(\frac{\sin 2\varphi_{\max}}{4} + \frac{\varphi_{\max}}{2}\right)\right].$$

Die Formel stimmt mit den Durchflußzeiten, die aus den Versuchen mit $\sum_0^a \frac{\Delta x}{v}$ gerechnet wurden, gut überein.

4. Die Plastizitätszahl S beim Walzen. D. Dresden setzt die Differenz aus den beiden Hauptspannungen nicht gleich der doppelten maximalen Schubspannung, sondern proportional einer Plastizitätszahl oder Bildsamkeitsziffer S, der Formänderungs-

geschwindigkeit $\frac{dh}{dt}$ und umgekehrt proportional der jeweiligen Höhe h des Walzgutes, die beiden letzten Faktoren bezogen auf den zu untersuchenden Querschnitt.

Die Plastizitätsgleichung lautet daher

$$\sigma_y - \sigma_x = -S \frac{dh}{h\,dt}$$

oder ausgeführt

$$\sigma_y - \sigma_x = S \frac{2K\varphi}{h_2^2(1+\nu\varphi^2)^2} \quad \ldots \ldots \quad (2^*)\text{[1]}$$

In dieser Formel bedeutet $K = vh = v_2 h_2 = v_w h_\gamma$, wobei h_γ die Höhe des Walzgutes am Haftpunkt, gleich ist $h_\gamma = (2r + h_2) - \frac{2x}{\operatorname{tg}\gamma}$; siehe Zahlentafel 3. Ferner ist $\nu = \frac{r}{h_2}$.

Für die Eintrittsstelle bei φ_{max} ist $\sigma_y = \sigma_y^k$ und $\sigma_x = 0$, d. h. es ist

$$\sigma_y^k = S \frac{2K\varphi_{max}}{[h_2(1+\nu\varphi_{max}^2)]^2} = S \frac{2K\varphi_{max}}{h_1^2}$$

und

$$S = \frac{h_1^2}{2K\varphi_{max}} \cdot \sigma_y^k \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

S hat die Dimension $\frac{\text{kg sek}}{\text{mm}^2}$. Zahlentafel 4 enthält die S Werte für 3 Eisen- und 1 Bleiversuch.

Zahlentafel 4.

V.-Nr.	Werkstoff	Temp. °C	σ_y^k kg/mm²	h_1 mm	h_γ mm	v_w mm	$K = v_w \cdot h_\gamma$ mm²/sek.	φ_{max} —	$2K\varphi_{max}$ mm²/sek.	$\frac{h_1^2}{2K\varphi_{max}}$ sek.	S kgsek/mm²
59	Eisen	1230	3,045	20	12,59	6,809	85,725	0,260	44,577	8,973	27,32
61	»	1250	2,301	20	9,62	9,674	93,064	0,298	55,466	7,212	16,59
64	»	1260	2,030	20	8,12	11,098	90,116	0,318	57,314	6,979	14,17
29	Blei	—	0,521	20,8	9,51	10,115	96,194	0,323	62,141	6,962	3,63

Nunmehr kann auch die Horizontalspannung σ_x berechnet werden. Sie ist

$$\sigma_x = \sigma_y - D \frac{\varphi}{(1+\nu\varphi^2)^2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

wobei

$$D = S \frac{2K}{h_2^2}$$

für ein und denselben Versuch eine Konstante ist.

5. Die Walzleistung.

Sie wurde auf drei Arten gerechnet. Es wurde

1. die aufgewandte Leistung unter Berücksichtigung des Voreilens ermittelt. Hierbei leisten die Walzen im Bereich von φ_{max} bis zum Haftpunkt bei γ Arbeit, indem sie das Walzgut einziehen. Der Reibungskoeffizient ist $+\mu$. Im Haftpunkt haben Walzen und Walzgut die gleiche Geschwindigkeit. Von hier bis zum Austrittsquerschnitt, in welchem das Walzgut eine größere Geschwindigkeit hat als der Walzenumfang, leistet das Walzgut Arbeit, indem es die Walzen zu beschleunigen sucht. Der Reibungskoeffizient ist $-\mu$. Siehe Abb. 1, 2a, 2b und 6, sowie Zahlentafel 3 und 5.

Im Gebiet φ_{max} bis γ ist der bezogene Normaldruck auf die Walze

$$n = \frac{\sigma_y}{1 + \mu \operatorname{tg}\varphi}.$$

---

[1]) Es ist $\frac{h}{2} = \frac{h_2}{2} + r(1-\cos\varphi) = \frac{h_2}{2} + \nu h_2 (1-\cos\varphi)$ und wenn $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ gesetzt wird, $h = h_2(1+\nu\varphi^2)$, somit $\frac{dh}{d\varphi} = -2\nu h_2\varphi$; ferner ist $v = \frac{r\,d\varphi}{dt}$ und $dt = \frac{r\,d\varphi}{v} = r\,d\varphi\frac{h}{K} = r\,d\varphi\frac{h_2(1+\nu\varphi^2)}{K}$.

Damit wird
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2\nu h_2\varphi \cdot d\varphi \cdot K}{r\,d\varphi \cdot h_2(1+\nu\varphi^2)} = -\frac{2K\varphi}{h_2(1+\nu\varphi^2)}$$

und
$$\frac{dh}{h\,dt} = -\frac{2K\varphi}{h_2^2(1+\nu\varphi^2)^2}.$$

Im Gebiet γ bis 0 hingegen $n = \frac{\sigma_y}{1 - \mu \operatorname{tg} \varphi}$.

Damit folgt, wenn b_m die mittlere Breite des Walzgutes ist,

$$L_n^- = 2 \mu v_w r b_m \left\{ \int_\gamma^{\varphi_{max}} n \, d\varphi - \int_0^\gamma n \, d\varphi \right\} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Zahlentafel 5.

V.-Nr.	x mm	φ ° ′	$1 \pm \mu \operatorname{tg} \varphi$ —	σ_y kg/mm²	σ_x kg/mm²	n kg/mm²	$\int n \, d\varphi$ kg/mm²	
64	39,03	18° 12′	1,024	2,03	0,00	1,98	4,65	$D = 46{,}1$ kg/mm² $\mu = +0{,}072$
	28	12° 57′	1,017	11,32	8,28	11,13		
	18	8° 17′	1,011	26,44	22,75	26,15		
	9	4° 08′	1,005 / 0,995	45,18	42,37	44,96 / 45,41		
	6	2° 45′	0,997	14,07	12,04	14,11	0,97	$\mu = -0{,}072$
	3	1° 23′	0,998	4,52	3,41	4,52		
	0	0° 0′	1,000	0,00	0,00	0,00		

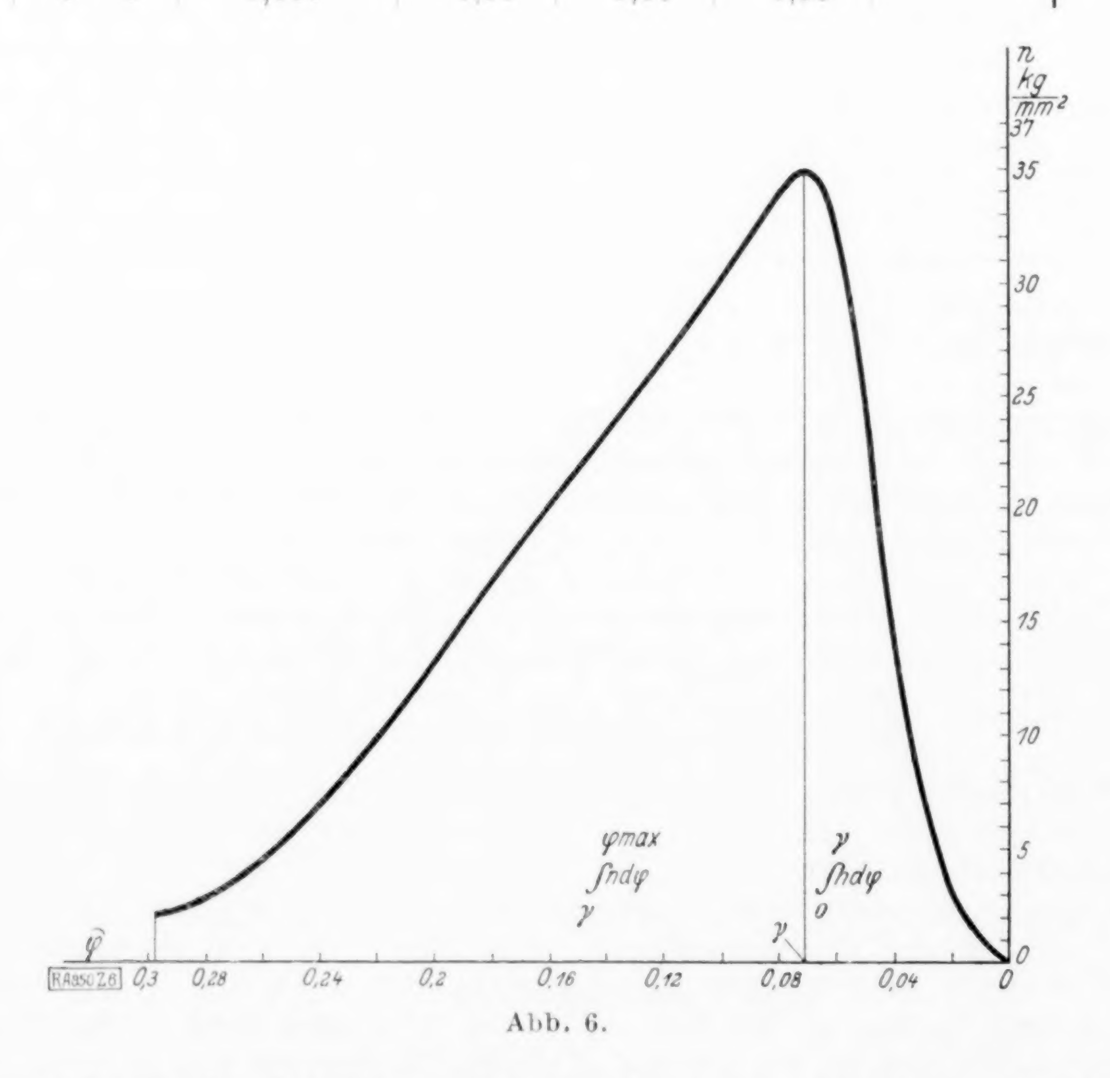


Abb. 6.

2. die aufgewandte Leistung unter der Annahme ermittelt, daß die Walzen im Voreilgebiet auch positive Arbeit leisten, womit

$$L_n = 2 \mu v_w r b_m \int_0^{\varphi_{max}} n \, d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (7a)$$

wird.

3. die »Nutzleistung« gerechnet, d. i. diejenige kleinste Walzarbeit je Sekunde, wenn die Vertikalspannung im ganzen Umformungsgebiet konstant bliebe und denjenigen Wert hätte, bei welchem die erste bleibende Formänderung auftritt, d. i. σ_y^k. Sie beträgt, wenn $V_\gamma = b_m h_\gamma v_w$ das sekundlich durch den Querschnitt fließende Volumen ist,

$$L_l = \sigma_y^k V_\gamma \operatorname{lgnat} \frac{h_1}{h_2} \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Es wurde ferner der Wirkungsgrad bestimmt, womit das Verhältnis $\frac{\text{Nutzleistung}}{\text{aufgewandte Leistung}}$ bezeichnet wird.

Es ist $\bar{\eta} = \frac{L_l}{\bar{L}_n}$, bzw. $\eta = \frac{L_l}{L_n}$. (Siehe Zahlentafel **6**.)

Ersterer entspricht den Ergebnissen aus praktischen Versuchen [1]), letzterer scheint jedoch zu klein zu sein.

Zahlentafel 6.

V.-Nr.	Werkstoff	Temp. °C	h_1 mm	h_2 mm	b_m mm	μ	v_w mm/sek.	L_l kg mm/sek.	$\bar{L}_n$ kg mm/sek.	L_n kg mm/sek.	$\bar{\eta}$	η
59	Eisen	1230	20	11,6	30,5	0,088	6,809	4331,0	5025,7	14803,0	0,86	0,29
61	»	1250	20	9,0	31,6	0,072	9,674	5399,9	14774,4	26494,9	0,37	0,20
64	»	1260	20	7,5	32,5	0,072	11,098	5826,6	23891,8	36486,9	0,24	0,16
29	Blei	—	20,8	7,9	52,0	0,121	10,115	2520,0	4057,3	16945,1	0,62	0,15

6. Schluß.

Aus der Untersuchung folgt:

1. Die Vertikalspannung σ_v ist nicht konstant und behält nicht den Kleinstwert bei, bei dem die erste bleibende Formänderung auftritt. Sie erreicht Werte, die wesentlich, zuweilen um das Vielfache über den bei den entsprechenden Temperaturen bis jetzt angenommenen liegen.

2. Die für die Umformung tatsächlich aufzuwendende Leistung ist größer als die Leistung, wie sie bisher nach der Finkschen Formel $L = k\,V \,\mathrm{lgnat}\,\frac{h_1}{h_2}$ gerechnet wurde.

Zu 1. Die Kenntnis der Größe der σ_v und deren Verlauf bieten eine Grundlage für die Dimensionierung der Walzen (Walzendurchmesser, Ballenlänge, Biegungsmoment, Zapfendurchmesser, Verhältnis von Walzendurchmesser: Zapfendurchmesser, zulässiges Schlichtmaß für das Abdrehen der Walzen) und die Größe der zulässigen Kalibertiefe (die Parabel gleichen Widerstandmomentes = kubische Parabel muß vollständig innerhalb des Walzenkörpers zu liegen kommen und darf nirgends die Kaliber schneiden). Die Berechnung des resultierenden Druckes unter Zugrundelegung eines spezifischen Druckes von 2 bis 6 kg/mm² ergibt zu kleine Werte.

Zu 2. Die Kenntnis der tatsächlich aufzuwendenden Leistung für einen Stich, bzw. in einem Walzenstrang für mehrere gleichzeitige Stiche bildet die Grundlage für die Dimensionierung des Antriebs. Diese ist das schwierigste, weil unsicherste Kapitel im Walzwerksbau. Die Schwierigkeit ist lediglich aus der Unkenntnis der Größe der reinen Umformungsarbeit entsprungen. Aus dem Wirkungsgrad folgt, daß die logarithmische Formel für die Walzleistung zu kleine Werte ergibt. Mit der größeren Umformungsarbeit ergibt sich wegen der größeren Zapfendrücke unmittelbar eine größere Zapfenreibungsarbeit, die ihrerseits wieder die Verwendung des größeren Drücken standhaltenden Lagermetalls (Legierungen mit nur geringem Bleizusatz) verlangen. Ferner entsprechen der größeren Walzleistung infolge der dadurch erhöhten Zahndrücke in den Getrieben größere Getriebeverluste.

Daraus folgt, daß bei der Berechnung der Größe eines Antriebs für eine Walzenstraße, dessen Gesamtleistung sich zusammensetzt aus a) der tatsächlich aufzuwendenden Leistung $\bar{L}_n$ für die Formänderung des Profiles, b) der Zapfen- oder Lagerreibungsleistung L_z, c) den Getriebeverlusten L_G, d) der Leerlaufleistung der Walzenstraße L_W und e) den Verlusten im Antrieb selbst L_A, die richtige Ermittlung von $\bar{L}_n$ von grundlegender Bedeutung ist.

Der Mangel einer zureichenden Formel zur Berechnung der Umformungsleistung ist in neuerer Zeit, wo die neu zu bauenden Walzenstraßen zum größten Teil elektrisch angetrieben werden, um so fühlbarer geworden, weil die Motoren nicht so große Ueberlastungen wie die Dampfmaschinen vertragen und von der richtigen Dimensionierung des Antriebs die Wirtschaftlichkeit der ganzen Anlage abhängen kann. 950

[1]) Tafel, Der Wirkungsgrad unserer Walzwerke. Stahl u. Eisen 1919, S. 381. — Preußler, Zur rechnerischen Ermittlung der reinen Umformungsarbeit. Stahl u. Eisen 1920, S. 641.

Potentialströmung durch ruhende oder bewegte Schaufelgitter mit Schaufeln von beliebiger Form.

Von **W. SPANNHAKE** in Karlsruhe (Baden) und **W. BARTH** in Völklingen a. d. Saar[1]).

A. Allgemeine Darstellung der Methode.

1. Stellung der Aufgabe und Grundgedanken der Lösung. In den letzten Jahren sind Strömungen durch Parallel- und Kreisgitter von Schaufeln mehrfach Gegenstand der theoretischen Behandlung gewesen. Soweit diese sich die Aufgabe stellen, exakte Lösungen für die Potentialströmungen zu liefern, beschränken sie sich alle auf das »ebene Problem« und verwenden die Methode der konformen Abbildung[2]). Die behandelten Fälle beziehen sich auf Schaufelkurven von solchen Formen, die für die Rechnung besonders bequem sind, also Gerade (Kutta, König, Spannhake[2]) und logarithmische Spiralen. (Sörensen, Schulz, Busemann[3]). Bei den verwendeten Abbildungsmethoden tritt für allgemeine Schaufelformen immer die Schwierigkeit auf, daß sich mit Veränderung der Schaufelzahl z im Kreisgitter auch die Schaufelform und das Radienverhältnis ändert, was mit den Eigenschaften der Abbildungsfunktion $w = \sqrt[n]{\zeta}$ zusammenhängt. Diese bringen es auch mit sich, daß die Konvergenz des Verfahrens häufig nicht wünschenswert rasch ist, namentlich für Gitter mit überdeckenden Schaufeln bei verhältnismäßig noch geringen Schaufelzahlen im Kreisgitter.

Die Verfasser haben sich nun die Aufgabe gestellt, eine Methode zu entwickeln, welche die Abbildung $w = \sqrt[n]{\zeta}$ vermeidet und mittels deren Kreisgitter und Parallelgitter mit allgemeinen Schaufelformen, bei Kreisgittern mit oder ohne Rotation untersucht und die Strömungen durch sie errechnet werden können. Die Beschränkung auf ebene Probleme ist vorläufig beibehalten.

Die Methode baut auf zwei Grundgedanken auf:

Erstens. Jedes Profil, das sich für eine Kreiselradschaufel eignet, läßt sich konform auf einen Kreis abbilden, sei es eine irgendwie gekrümmte Linie, oder ein »verdicktes« Profil (Joukowsky-Profile oder allgemeinere)[4]).

Zweitens. Wenn in eine irgendwie gegebene Strömung ein oder mehrere Körper eingebracht werden, die sich in ihr bewegen oder in ihr ruhen, so lassen sich die Störungen, die dadurch in der ursprünglichen Strömung hervorgerufen werden, durch Quellverteilungen auf der Berandung der Körper darstellen und durch die entgegengesetzt gleichen Quellverteilungen beseitigen. Dies heißt nichts anderes, als daß alle Randwertprobleme auf

[1]) Grundgedanke und endgültige Fassung dieser Arbeit stammen vom erstgenannten, die Ausarbeitung vom zweitgenannten Verfasser.

[2]) W. M. Kutta: Ueber Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen. Sonderabdruck aus den Sitzungsberichten d. Königl. Bayr. Akad. d. Wiss., Math. phys. Kl. 1911, 4ter Spezialfall. Strömung um die Jalousie. Parallelgitter mit Schaufeln senkrecht zur Gitterachse. — E. König: Potentialströmung durch Gitter. Diese Zeitschr. Bd. 2 (1922), Heft 6. Parallelgitter mit Schaufeln schräg zur Gitterachse mit und ohne Ueberdeckung. — W. Spannhake: Die Leistungsaufnahme einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe mit radialen Schaufeln. Festschrift der Hochschule, Karlsruhe 1925, oder auch »Hydraulische Probleme«, VDI-Verlag 1926. Erstmalige exakte Behandlung eines rotierenden Gitters durch Trennung der verschiedenen Randwertprobleme. — W. Spannhake: Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern (Erste und zweite Randwertaufgaben). Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), Heft 6. Vorträge der Danziger Tagung. Allgemeine Formulierung des Problems.

[3]) E. Sörensen: Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder. Diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), Heft 2. Radialräder mit logarithmischen Spiralen. Abbildung auf die reelle Achse. — W. Schulz: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), Heft 1. Näherungsweise Abbildung auf den Kreis. — Busemann: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), Heft 5. Exakte Abbildung auf den Kreis.

Etwas andere Wege geht Pavel, siehe Anm. 1 auf S. 467.

[4]) Siehe Grammel: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. — v. Kármán-Trefftz: Potentialströmungen um gegebene Tragflächenquerschnitte. Zeitschr. f. M. F. 1928. — v. Mises: Zur Theorie des Tragflächenauftriebes. Zeitschr. f. M. F. 1917/18. — Geckeler: Ueber Auftrieb und statische Längsstabilität von Flugzeugtragflächen in ihrer Abhängigkeit von der Profilform. Münchener Dissertation 1921. Verlag Oldenbourg, München.

solche zweiter Art zurückgeführt werden können[1]). In besonderen Fällen, oder als Näherung, können an Stelle der Verteilungen auf dem Rande auch Verteilungen im Innern der Konturen treten.

Im übrigen wird die Strömung wie in den früheren Arbeiten in eine »Durchflußströmung« mit Zirkulation um die Schaufeln und eine »Verdrängungsströmung« zerlegt[2]).

Die Bestimmung des ersten Strömungsanteils ist zunächst ein Randwertproblem erster, die des zweiten unmittelbar ein solches zweiter Art.

2. Zurückführung des Randwertproblems erster Art auf ein solches zweiter Art. a) Ein Randwertproblem zweiter Art liegt dann vor, wenn auf der Begrenzung des Strömungsfeldes Vorschriften über die Normalkomponente der Geschwindigkeit gemacht werden. Unmittelbar so gestellt wird die Aufgabe bei den Verdrängungsströmungen. Solche Strömungen werden durch Bewegung eines Körpers in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit hervorgerufen. Die Geschwindigkeiten an der Körperoberfläche sind in diesem Fall nicht tangential gerichtet; damit jedoch die Wasserteilchen den Körper nicht durchdringen, muß eine bestimmte Normalkomponente C_n der Absolutgeschwindigkeit C an jedem Punkt der Oberfläche gefordert werden. Nehmen wir beispielsweise an, der in Abb. 1a dargestellte Körper rotiere mit der Geschwindigkeit ω um das Zentrum D. Ein Punkt P, der den Abstand r vom Drehpunkt hat, besitzt dann die Umfangsgeschwindigkeit $u = r \cdot \omega$. Damit die Strömung den Körper nicht durchsetzt, muß die Normalkomponente C_n der Absolutgeschwindigkeit mit der Normalkomponente u_n der Geschwindigkeit des Körperpunktes P übereinstimmen.

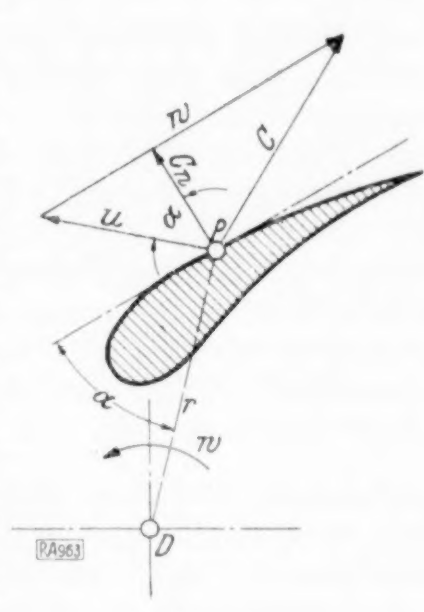


Abb. 1a.

Es muß also sein:

$$c_n = r \cdot \omega \cdot \cos \alpha$$

α ist der Winkel zwischen dem Fahrstrahl r und der Konturtangenten des Punktes P.

b) Bei ruhenden, umströmten Körpern liegt eine Durchflußströmung und damit zunächst ein Randwertproblem erster Art vor. Die Geschwindigkeiten an der Körperoberfläche dürfen keine Normalkomponenten besitzen. Denkt man sich in irgendeine, zunächst ungestörte Strömung, z. B. eine reine Translationsströmung oder in die einer Quelle oder Senke einen Körper eingebracht und festgehalten, so müssen die von der ungestörten Strömung an der Körperoberfläche herrührenden Normalkomponenten zum Verschwinden gebracht werden. Dies kann durch Anbringen einer Quell-Senkenverteilung — im folgenden kurz »Quellverteilung« genannt — auf der Oberfläche des Körpers geschehen. Diese muß also den ursprünglichen Normalkomponenten c — den »Störungskomponenten« — entgegengesetzt gleiche hervorrufen; außerdem erzeugt sie zusätzliche Tangentialkomponenten. Natürlich ist aber $\overset{0}{\int} c_n \, d o$ über die Oberfläche des Körpers = Null. Die Wirkungen der einzelnen Elementarquellen in die freie Flüssigkeit hinein klingen bei räumlichen Problemen wie $1/r^2$, bei ebenen wie $1/r$ ab. In Abb. 1b ist das Gesagte veranschaulicht. c_q ist die von der Quelle Q am Körperpunkt P hervorgerufene Geschwindigkeit mit der Normalkomponente c_{qn} und der Tangential-

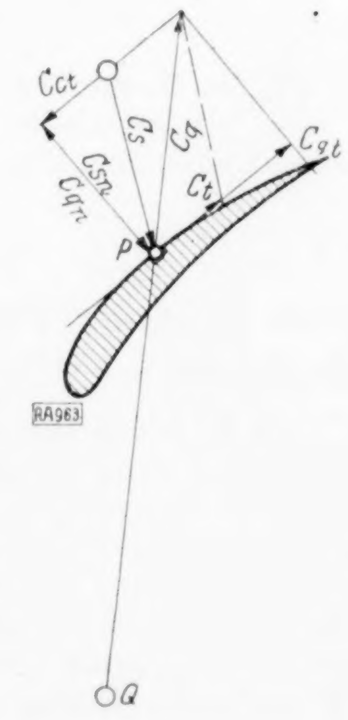


Abb. 1b.

[1]) Siehe z. B. Lamb: Hydrodynamik. Deutsch von Friedel, Kap. III, § 57 und 58; oder auch Handbuch der Physik von Geiger und Scheel, Bd. VII, Kap. 1, Ziffer 21, 24, 25.

Der gleiche Gedanke in anderer Behandlung ist von Pavel verwendet worden. Siehe Pavel: Ebene Potentialströmungen durch Gitter und Kreiselräder. Züricher Promotionsarbeit 1925. Verlag Rascher & Cie. Jedoch wird hier immer noch die Abbildung auf das Polarnetz verwendet, deren Umgebung für unsere Methode wesentlich ist.

[2]) Ueber diese Bezeichnungen vergl. die oben zitierten Arbeiten des erstgenannten Verfassers.

komponente c_{qt}. c_s ist die von der überlagerten Quellverteilung in P hervorgerufene Geschwindigkeit mit der Normalkomponente $c_{sn} = - c_{qn}$ und der (Zusatz-) Tangentialkomponente c_{st}. C_t ist die resultierende, am Körper nur noch tangential gerichtete Geschwindigkeit [1]).

Eine reine Zirkulationsströmung um einen Körper führt natürlich, da sie an ihm selbst nur Tangentialgeschwindigkeiten besitzt, nur dann zu Randwertproblemen zweiter Art, wenn noch andere Körper mit oder ohne Zirkulation in der Strömung vorhanden sind.

3. Bestimmung des Potentials einer Quellverteilung für eine an einer beliebigen Kontur gegebene C_n-Verteilung, welche die Bedingung $\int^{0} c_n \cdot d\,o = 0$ erfüllt, für das ebene Problem. Mit der Feststellung, daß einer gegebenen c_n-Verteilung eine bestimmte Quellverteilung entspricht, ist die Schwierigkeit zunächst nicht beseitigt, sondern nur verschoben. Insbesondere ist die gesuchte Quellverteilung im allgemeinen durchaus nicht proportional mit der C_n-Verteilung, d. h. die Elementarquelle ist nicht etwa $d\,q = c_n \cdot d\,s$. Man sieht dies sofort ein, wenn man bedenkt, daß jede Elementarquelle im allgemeinen nicht nur an ihrem eigenen Sitz auf der Körperoberfläche, sondern auch an jeder anderen Stelle derselben Normalkomponenten erzeugt. Für das ebene Problem gilt es aber eine Kontur, nämlich den Kreis und als Grenzfall die unendliche Gerade, wo sich die Aufgabe dadurch vollkommen vereinfacht, daß die gesuchte Quellverteilung mit der gegebenen c_n-Verteilung proportional wird. Dies hängt damit zusammen, daß man beim Erfülltsein der Bedingung $\int^{\sigma} c_n \cdot d\,s = 0$ zu jeder Elementarquelle auf dem Kreis eine gleich starke Elementarsenke angeben kann und daß dies Quellsenkenpaar den Kreis zur Stromlinie macht, also an keiner Stelle, außer an den beiden ihrer eigenen Sitze, Normalkomponenten hervorruft. Die weitere Verfolgung dieser Verhältnisse ergibt, daß die Elementarquelle für die Stelle mit der Normalkomponente c_n die Ergiebigkeit $d\,q = 2\,c_n \cdot d\,s$ haben muß (weil die Quelle sowohl den Außen- als auch den Innenraum des Kreises mit Flüssigkeit zu versorgen hat). Dann kann man aber für die Strömung im Außenraum eines Kreises in der ζ-Ebene mit gegebener $c_{n\zeta}$-Verteilung sofort das komplexe Potential hinschreiben.

Es wird:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{c_{n\zeta}}{\pi} \lg(\zeta - \varrho \cdot e^{i\varphi})\, \varrho\, d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wenn der Mittelpunkt des Kreises im Nullpunkt der ζ-Ebene liegt und sein Radius ϱ ist [1]).

$c_{n\zeta}$ ist die Normalkomponente am Kreise der ζ-Ebene, sie ergibt sich aus der an einer beliebigen Kontur der w-Ebene gegebenen c_{nw} durch die Beziehung

$$c_{n\zeta} = c_{nw} \left| \frac{d\,w}{d\,\zeta} \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

wenn $\left|\frac{d\,w}{d\,\zeta}\right|$ der Absolutwert der Ableitung der Funktion $w = f(\zeta)$ ist, mittels deren die Kontur auf den Kreis abgebildet wird.

4. Methode sukzessiver Approximation bei z Schaufeln im Kreisgitter. Die Strömung eines radialen »Einschaufel-Kreiselrades« mit beliebigem Schaufelprofil läßt sich aus der Strömung einer Wirbelquelle um einen eingelagerten Kreis herum (Potential in geschlossener Form, Spiegelung der Wirbelquellen und der ∞ fernen Senke am Kreis) mit Zirkulation um diesen unter gleichzeitiger Ueberlagerung der Verdrängungsströmung jederzeit leicht ermitteln und in die bekannten Teilströmungen zerlegen. Ordnet man z solcher Schaufeln und »Einschaufelströmungen« achsensymmetrisch um den Sitz der Wirbelquelle herum an, so ruft die Summe der z Einschaufelströmungen an jeder der Schaufeln störende Normalkomponenten — im folgenden kurz »Störungskomponente« genannt — hervor, und zwar — wegen der Achsensymmetrie — an jeder Schaufel die gleichen. Man kann sie durch z Quellverteilungen beseitigen, deren jede an den ein-

[1]) Pavel nennt die von der überlagerten Quellverteilung herrührende Strömung »Hilfsströmung« s. a. a. O.

[2]) Der exakte Beweis für die obige Entwicklung kann in analoger Weise, wie bei Sörensen a. a. O. für die Gerade angegeben, geführt werden.

[3]) Siehe die oben genannten Arbeiten des erstgenannten Verfassers.

zelnen Schaufeln die gleiche ist; also wieder auf einfache Weise durch Zurückgehen in die ζ-Ebene, d. h. an die Kreiskontur, bestimmt werden kann. Dadurch werden die ersten Störungen beseitigt, aber neue, und wieder an allen Schaufeln gleiche, hervorgerufen. Diese sollen als solche zweiter Ordnung bezeichnet werden, ohne damit zunächst eine Vorstellung über die Größe zu verbinden. Sie werden genau so beseitigt wie die ersten und rufen nun solche dritter Ordnung hervor, die wieder beseitigt werden usw. Für das endgültige Potential ergäbe sich rechnerisch eine Reihe, deren Konvergenz allgemein zu untersuchen wäre. Hierauf wird hier verzichtet, da die durchgerechneten Beispiele selbst bei acht Schaufeln noch eine sehr rasche Konvergenz ergeben. Uebrigens ist es in Fällen, wo die Konvergenz nicht befriedigen sollte, auch möglich, in folgender Weise vorzugehen: Man bestimmt aus dem Einschaufelrad erst ein Zweischaufelrad, dann ein Vier-, weiter ein Achtschaufelrad usw., wodurch der Grad der Konvergenz unter Umständen verbessert wird. Man kann im übrigen das Verfahren auf die Gesamtströmung, wie auch auf die Einzelströmungen — Durchfluß — Verdrängungs- und Zirkulationsströmungen anwenden. Es kann dabei zweckmäßig sein, auch die Einschaufelströmung unter Zuhilfenahme von Quellverteilungen an der ersten Schaufel, als nicht in der oben angegebenen Weise darzustellen. Dies ist in dem durchgearbeiteten Beispiel geschehen. Das vorteilhafteste Verfahren wird von Fall zu Fall auszuwählen sein. Jedenfalls ist die Methode sehr beweglich, insb. zur Untersuchung von Einzelfällen; sie entspricht vor allen Dingen un-

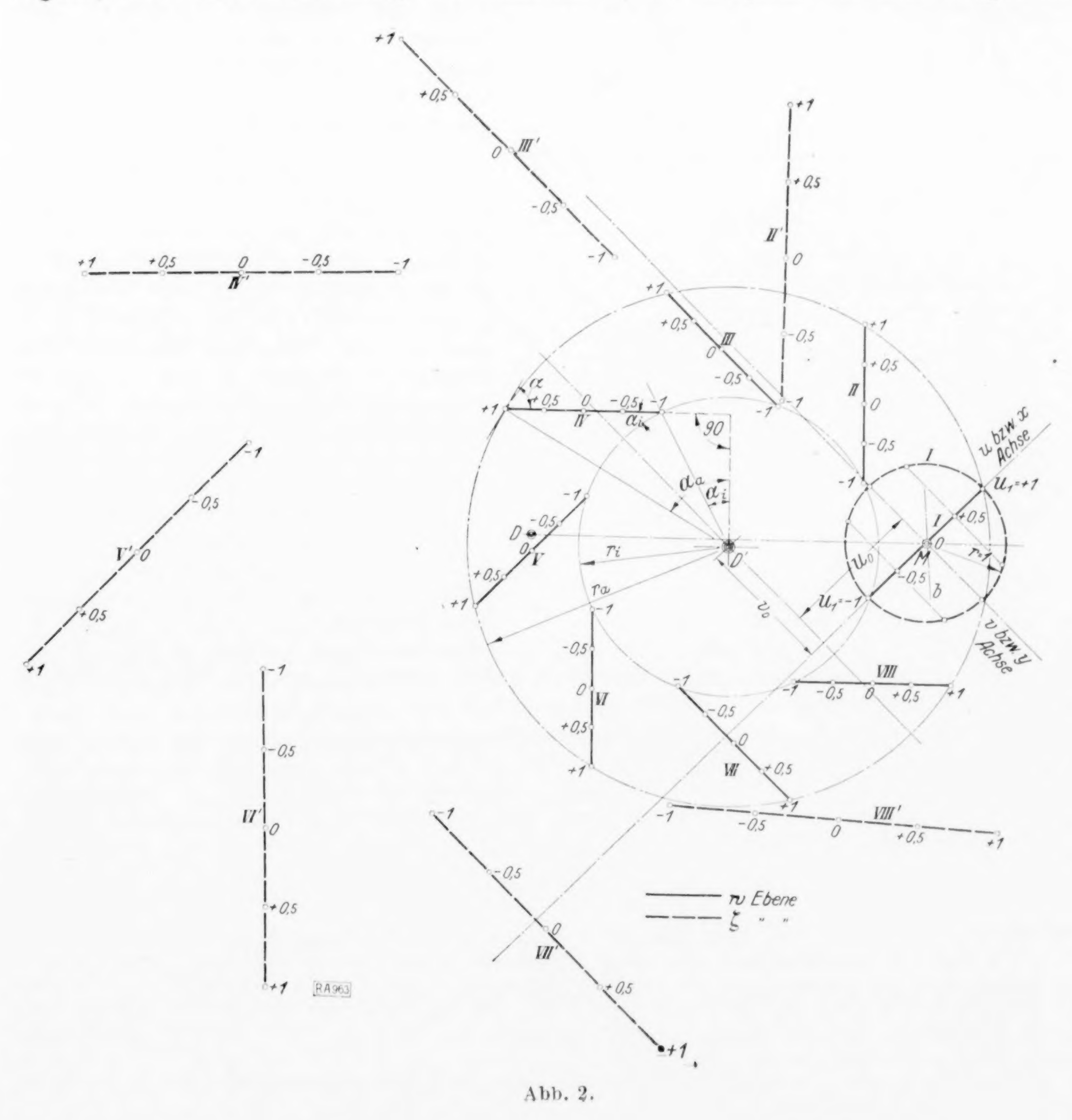


Abb. 2.

mittelbar dem praktischen Fall, wo ein Schaufelrad in Vergleichsversuchen mit Schauflungen verschiedener Schaufelzahl, aber gleicher Schaufelform bei gleichem Radienverhältnis ausgerüstet wird. Sie eignet sich für ein halb rechnerisches, halb zeichnerisches Verfahren, das in Abschnitt B an einem Beispiel durchgeführt wird [1]).

B. Durchführung der Methode an einem Kreisgitter aus geraden, gegen den Radius geneigten Schaufeln.

1. Geometrische Beziehungen zwischen w- und ζ-Ebene. Siehe Abb. 2. Durch den Mittelpunkt der Schaufel I wird ein Koordinatensystem u, v gelegt. Die u-Koordinate fällt in die Richtung der Schaufel selbst. Die Länge der Schaufel wird in zwei Einheiten angenommen. Der Mittelpunkt D des Schaufelsystems hat die Koordinaten:

$$u_0 = -1{,}83\,, \qquad v_0 = 1{,}70\,.$$

Die w-Ebene wird nun auf die ζ-Ebene mit gleichem Nullpunkt und den Koordinaten $x \parallel u$, $y \parallel v$ so abgebildet, daß der Schaufel I der Einheitskreis der ζ-Ebene entspricht. Dann gilt bekanntlich:

$$w = {}^1/_2\,(\zeta + 1/\zeta) \quad . \quad . \quad (3).$$

Die dieser Formel entsprechende Konstruktion von Punkten der w Ebene aus denen der ζ-Ebene ist bekannt [2]). Hier handelt es sich um die umgekehrte Aufgabe. Die Abbildungsfunktion kann auch in der Form $\zeta = w \pm \sqrt{w+1} \cdot \sqrt{w-1}$ geschrieben werden.

Faßt man die einzelnen Größen als Vektoren auf, so ergibt sich die in Abb. 3 ausgeführte Konstruktion. Man findet aus dem gegebenen Punkte Q der W-Ebene den entsprechenden Punkt P in der ζ-Ebene, indem man von Punkt Q eine Strecke von der Länge $\sqrt{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$ parallel der Winkelhalbierenden des Winkels ϑ abträgt. ϱ_1 und ϱ_2 sind die Fahrstrahlen von dem Punkte M nach den Punkten, die um den Abstand ± 1 in Richtung der x-Achse von dem Punkt Q entfernt sind. ϑ ist der Winkel zwischen diesen beiden Fahrstrahlen. Auf diese Weise kann Punkt für Punkt das Bild des Schaufelsternes in der ζ-Ebene ermittelt werden. Der Mittelpunkt des Schaufelsystems D geht in einem bestimmten Punkt D' über (s. Abb. 2).

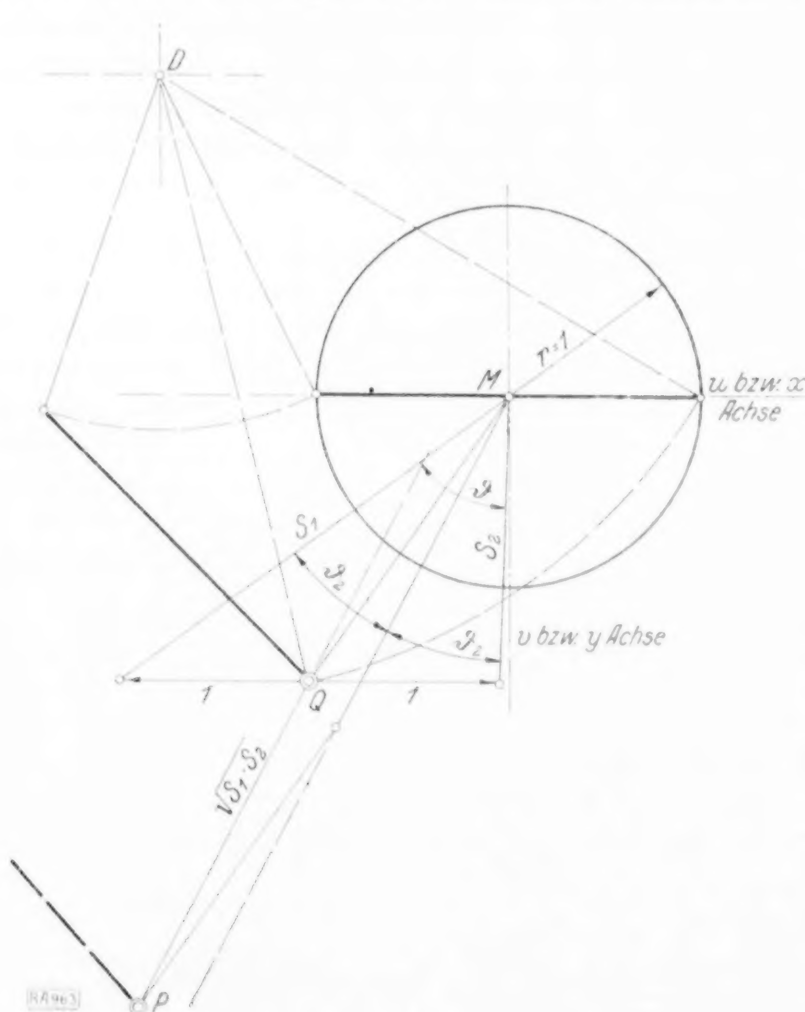


Abb. 3.

Die Bilder der verschiedenen Schaufeln außer Schaufel I werden Teile von Kurven dritten Grades.

2. Die Beziehung zwischen den Normalgeschwindigkeiten in der ζ- und w-Ebene. Nach Gl. (2) muß sein:

$$c_{n\zeta} = c_{nw} \left|\frac{dw}{d\zeta}\right| .$$

$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|$ errechnet sind in unserem Fall zu

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| = \frac{\sqrt{r^4 - 2\,(x^2 - y^2) + 1}}{2\,r^2}\,; \qquad r^2 = x^2 + y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

[1]) Nach der Durchrechnung des unten gebrachten Beispiels erfuhr der erstgenannte Verfasser durch Hrn. Trefftz von einer ungedruckten Doktordissertation des Hrn. Pohlhausen, i. d. d. Prinzip der Methode auf die Strömung um einen Doppeldecker angewandt ist. Hr. Pohlhausen machte dann darauf aufmerksam, daß ein Auszug aus der Dissertation im Jahrb. d. Philos. Fakultät in Göttingen, Jahrg. 1921, p. 60 erschienen ist.

[2]) Siehe Trefftz: Graphische Konstruktion Joukowskyscher Tragflächen. Z. f. M. F. Bd. IV (1913), S. 130.

Für die Punkte des Kreises ($r = 1$) wird daraus

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| = |y| = |\sin\varphi| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

und damit ergibt sich am Kreise

$$c_{u_\zeta} = c_{u_w} \cdot |\sin\varphi| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Der absolute Betrag des Differentialquotienten kann nun mit Hilfe der angegebenen Formel für alle Punkte des Schaufelsternes auf rechnerische Weise ermittelt werden. Die Größen r, x und y greift man aus der Zeichnung (Abb. 2) ab.

3. Herstellung der Greenschen Funktion (Einflußfunktion) des Problems.

a) Ermittlung der von der Belegung einer Schaufel an den übrigen hervorgerufenen Störungskomponenten (s. Abb. 4). Wir gehen von der ζ-Ebene aus und nehmen längs des Kreises eine bestimmte Quellverteilung an. Diese erzeugt in der ζ-Ebene ein Geschwindigkeitsfeld und es sind zunächst die von diesem herrührenden Normalkomponenten an den Schaufelbildern, also z. B. im Punkte P (Abb. 4) zu bestimmen. Der von einer Elementarquelle $dq = c_{u_k} \cdot ds$ auf dem Kreisumfang in P erzeugte Geschwindigkeitsanteil errechnet sich zu

$$d\,c_p = \frac{c_{u_k} \cdot d\,s}{\pi} \cdot \frac{\cos\beta}{r},$$

wobei mit r der jeweilige Abstand von dem Element ds am Kreise mit der Komponente c_{u_k}, mit β der Winkel zwischen der Normalen am Schaufelbild und dem Fahrstrahl r bezeichnet wird.

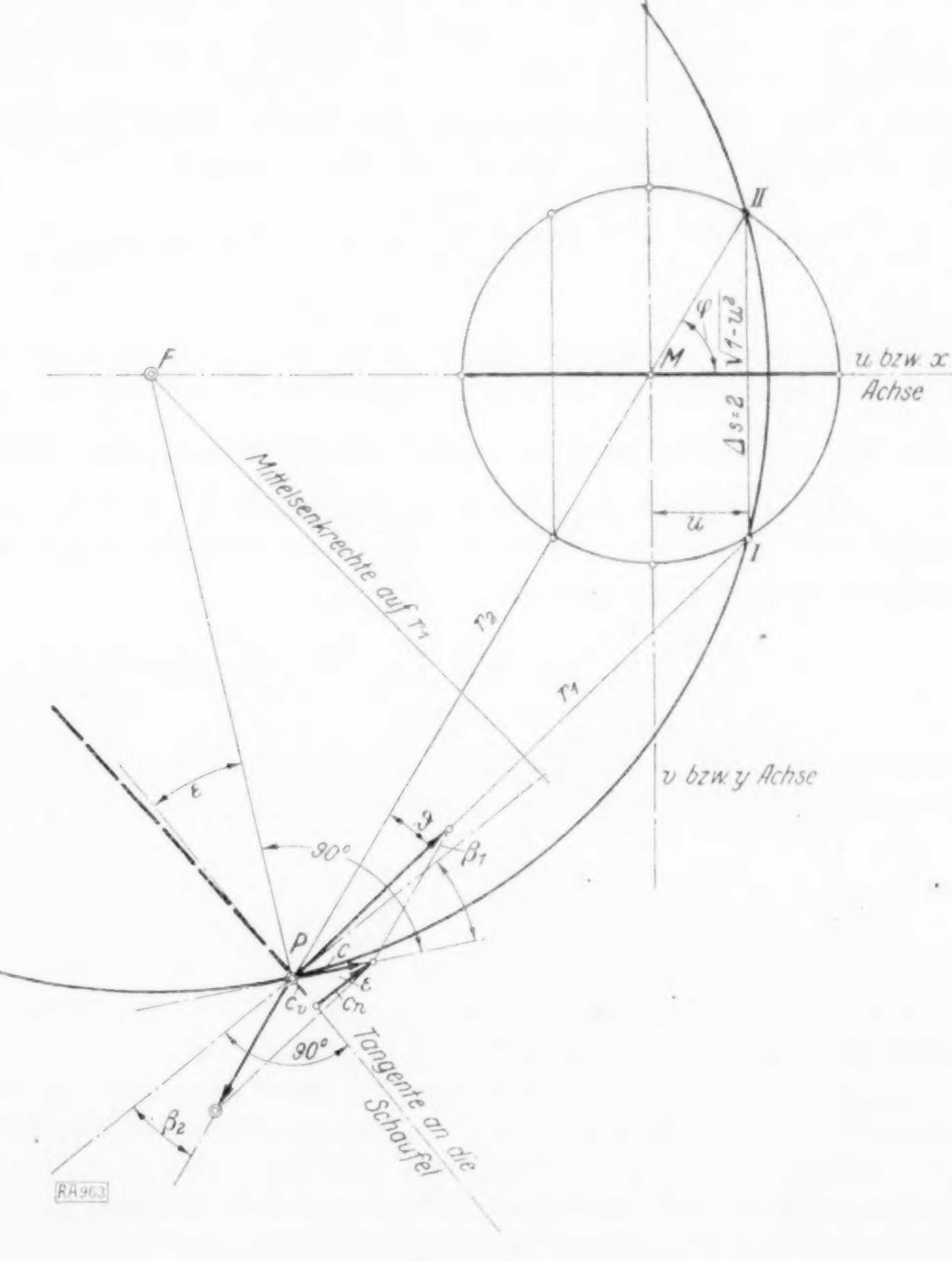


Abb. 4.

Da je ein Punkt auf der Vorderseite und der Rückseite der Schaufel die gleiche Quell- bzw. Senkstärke besitzt, die Verteilung am Kreise also symmetrisch zur x-Achse ist, können wir die beiden Punkte unmittelbar zusammenfassen. Es wird also in Punkt I des Kreisumfanges eine Quelle und in dem gegenüberliegenden Punkte II eine Senke angeordnet. r_1 und r_2 sind die Abstände von Punkt P nach den Punkten I und II, und δ der Winkel zwischen r_1 und r_2. Die resultierende Geschwindigkeit c ergibt sich dann zu

$$d\,c_p = \frac{c_{u\,k} \cdot d\,\varphi}{\pi} \cdot \frac{\Delta s}{r_1 \cdot r_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Δs ist der Abstand zwischen der Quelle und der Senke auf dem Kreis, also $\Delta s = 2\sqrt{1 - u_I^2}$.

Die von diesem Quell-Senkpaar herrührende Normalkomponente c_n ergibt sich damit zu

$$d\,c_{n_p} = \frac{c_{u\,k} \cdot d\,\varphi}{\pi} \cdot \frac{\Delta s}{r_1 \cdot r_2} \cdot \cos\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a).$$

ε ist der Winkel zwischen der Richtung der Geschwindigkeit C und der Schaufelnormalen. Wird nun der ganze Kreis mit elementaren Quell-Senkpaaren belegt, so errechnet sich die Normalgeschwindigkeit am Punkte P zu

$$c_{n_p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} c_{n_k} \frac{\sqrt{1-u_I^2}}{r_1 \cdot r_2} \cos \varepsilon \, d\varphi .$$

Führt man statt φ die Koordinate $u_I = \cos \varphi$ an Schaufel I als Unabhängige ein, so wird daraus

$$c_{n_p} = -\frac{2}{\pi} \int_{+1}^{-1} c_{n_k} \frac{\sqrt{1-u_I^2}}{r_1 \, r_2} \cos \varepsilon \frac{d u_I}{\sin \varphi} .$$

Ersetzt man die Komponente c_{n_k} am Kreis durch die Komponente c_{n_w} an der Schaufel I der W-Ebene ($c_{n_k} = c_{n_w} \cdot \sin \varphi$), so erhält man:

$$c_{n_p} = -\frac{2}{\pi} \int_{+1}^{-1} c_{n_w} \frac{\sqrt{1-u_I^2}}{r_1 \, r_2} \cos \varepsilon \cdot d\, u_I \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Geht man vom Schaufelbildpunkt P in der ζ-Ebene zum entsprechenden Schaufelpunkt Q in der W-Ebene über, so ergibt sich dort die Störungskomponente c_{n_Q} durch Multiplikation jedes Elementarbeitrages mit dem bereits errechneten Faktor $\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|$.

Die Störungskomponente an einem Punkt Q einer beliebigen Schaufel der W-Ebene, welche von einer Quell-Senkverteilung an Schaufel I mit dort vorgegebener C_{n_w}-Verteilung herrührt, ergibt sich also zu

$$c_{r_Q} = -\frac{2}{\pi} \int_{+1}^{-1} c_{n_w} \frac{\sqrt{1-u_I^2}}{r_1 \, r_2} \cos \varepsilon \left|\frac{d\zeta}{dw}\right| d\, u_I = C(u_I, w) \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Unter u_I ist die Koordinate u der Schaufel I (die Integrationsvariable), unter w die komplexe Koordinate des Punktes Q verstanden.

$$c_{n_w} \text{ ist } f(u_I), \qquad \frac{\cos \varepsilon}{r_1 \, r_2} \left|\frac{d\zeta}{dw}\right| \text{ ist } \varphi(u_I, w).$$

Die Funktion $K(u_I, w) = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1-u_I^2}}{r_1 \, r_2} \cdot \left|\frac{d\zeta}{dw}\right|$ ist die »Greensche« oder »Einflußfunktion« für den beliebigen Schaufelpunkt Q der W-Ebene, jedoch nur für Belegung der Schaufel I mit einer gegebenen C_{n_w}-Verteilung.

Der Sinn der Formel (9) für ihre Verwendung in den späteren Entwicklungen (siehe B, 4a) ist der folgende: Bei irgendeinem Randwertproblem zweiter Art tritt an einer Schaufel I eine »Belegung« mit Normalkomponenten auf. Diese muß durch eine Quellverteilung auf der Schaufel vernichtet werden, die an Schaufel (I) die entgegengesetzt gleiche Belegung mit Normalkomponenten erzeugt. Im übrigen Felde, also z. B. auch an den andern Schaufeln, ruft sie neue Störungen hervor. Diese gestattet Formel (9) sofort aus der gegebenen Belegung an Schaufel I zu berechnen, ohne daß die zur Vertilgung dieser notwendige Quellverteilung für sich wirklich ermittelt wird.

b) Darstellung der Einflußfunktion für die Belegung einer Schaufel durch Einflußlinien[1]). Die Einflußfunktion wird graphisch ermittelt. (Vgl. Abb. 5.) Das Glied $r_1 \cdot r_2$ wird durch Abgreifen der beiden Faktoren aus der Zeichnung ermittelt. Der Winkel ε wird auf Grund der Bemerkung gefunden, daß die Stromlinien eines Quell-Senkpaares Kreise sind, welche durch den Quell- und Senkpunkt gehen. Man bestimmt also den Mittelpunkt des Kreises, welcher durch das mit u_I gegebene Quell-Senkpaar am Einheitskreis und durch den gerade gewählten Schaufelbildpunkt P geht, indem man den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf r_1 bzw. r_2 mit der Koordinate u bestimmt. Der Winkel des Fahrstrahls von diesem Mittelpunkt nach dem betreffenden Schaufelbildpunkt P mit der Schaufeltangente ist sofort der gesuchte Winkel ε. Die Größe $\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|$ und $\sqrt{1-u_I^2}$

[1]) Vergl. die Darstellung der Einflußfunktion durch Einflußlinien für die Biegung eines Balkens. Siehe hierüber Neuauflage Riemann-Weber, v. Mises und Frank. 1. Bd., S. 386.

ermittelt man rechnerisch. Auf diese Weise kann die Einflußfunktion der Belegung C_{uw} auf Schaufel I vollständig ermittelt werden. Sie wird dann zweckmäßig für jede Schaufel mit der Ordnungszahl i durch eine Schar von »Einflußlinien«, aufgetragen über der Integrationsvariablen u_I, dargestellt; die Parameter der einzelnen Linien sind dabei die Koordinaten u_i auf der Schaufel i, die an die Stelle der komplexen Variablen w in der Einflußfunktion treten. Es hängt vom einzelnen Fall ab, wieviel Parameter u_i (z. B. $+1$, $+0{,}5$, $0{,}0$, $-0{,}5$, -1) und damit wieviel Einzellinien man wählen muß, um eine genügend genaue Darstellung zu erreichen.

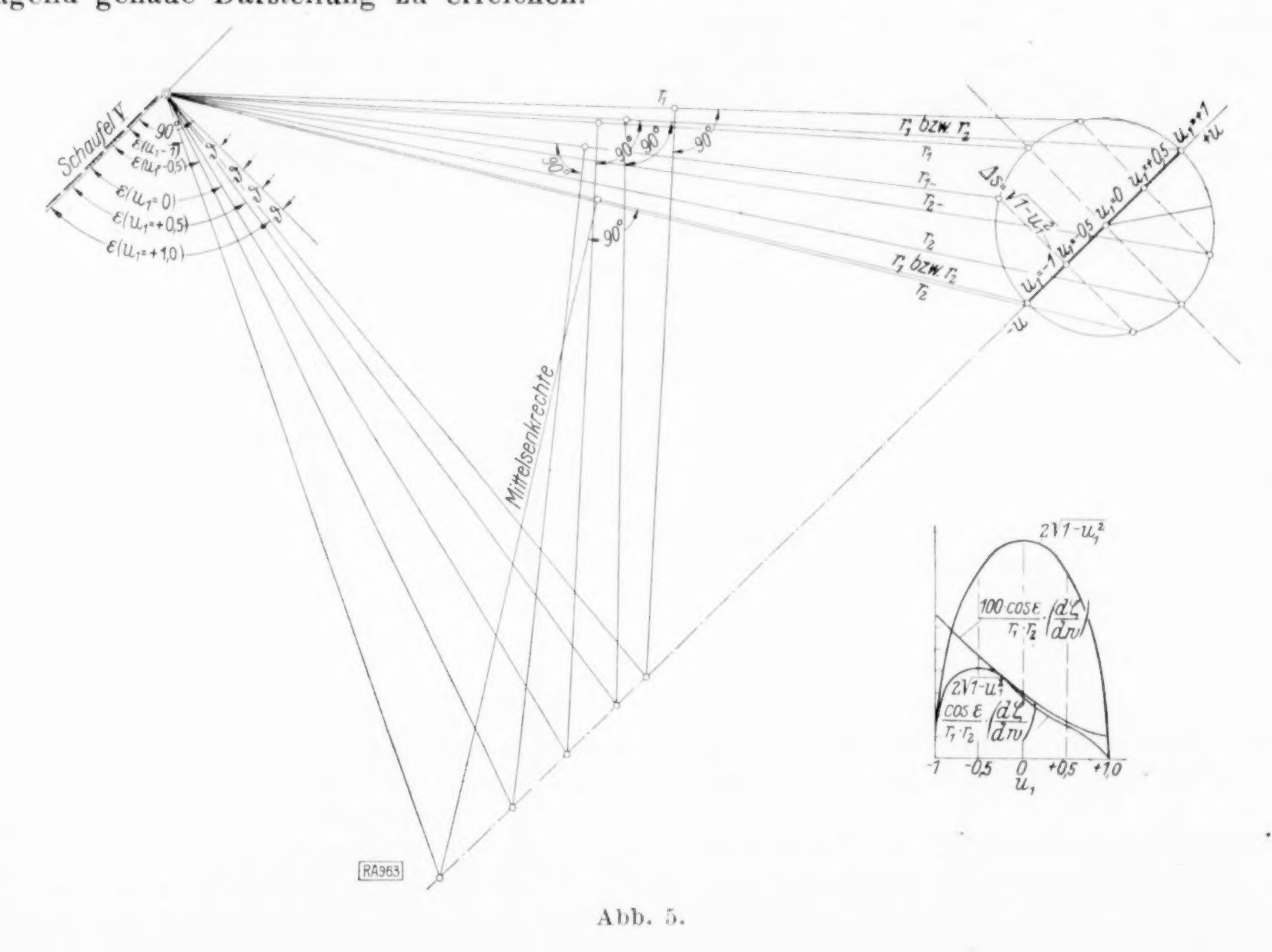


Abb. 5.

c) Darstellung der resultierenden Einflußfunktion für die Belegung aller Schaufeln durch die resultierenden Einflußlinien. Nunmehr nehmen wir alle Schaufeln I bis VIII, jede Schaufel mit der gleichen C_{uw}-Verteilung belegt, an. Da die Schaufeln achsensymmetrisch liegen, ergeben sich die Störungskomponenten an allen Schaufeln für gleichgelegene Punkte gleich. Daraus folgt aber, daß die Störung an jeder Schaufel gleich der Summe der Störungen ist, welche die Schaufel selbst an allen anderen verursacht. Sind also nicht nur in einer Schaufel, sondern in z Schaufeln Quellverteilungen gegeben, so ergeben sich für die an allen Schaufeln gleiche, durch die an allen Schaufeln gleiche c_{uw}-Verteilung verursachten resultierenden Störungen soviel resultierende Einflußlinien, als man von vornherein Parameter u_i gewählt hat. Diese können jetzt mit u bezeichnet werden. Für jeden Wert von u (z. B. 1,0, 0,5, 0,0 — 0,5, — 1,0) ist die Ordinate der resultierenden Einflußlinie = der Summe der früheren für den gleichen Wert der Parameter u_i ($i = 2, 3 \ldots z$) ermittelten. Die Darstellung der resultierenden Einflußfunktion durch Einflußlinien

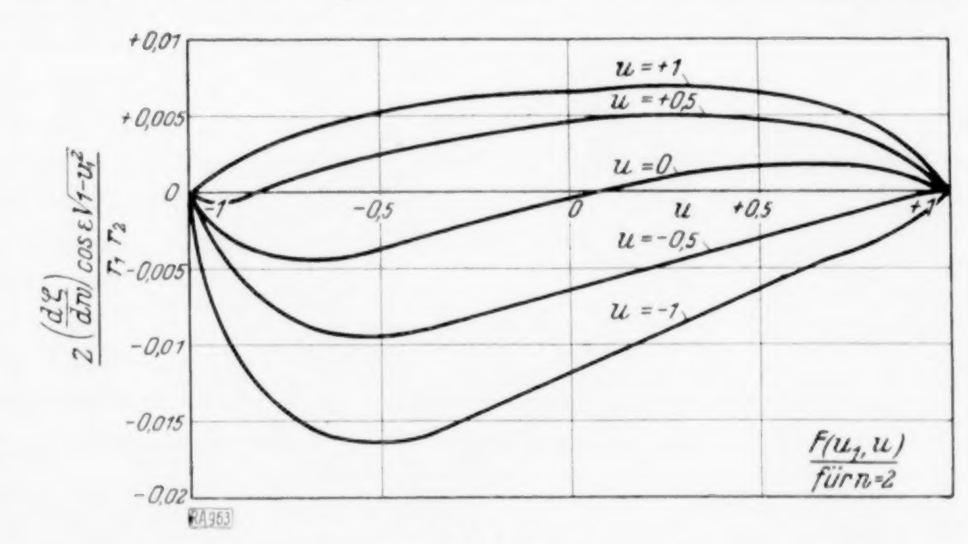


Abb. 6.

für die Parameter $u = +1, +0{,}5, \pm 0{,}0, -0{,}5, -1$ für $Z = 2{,}4$ und 8 Schaufeln geben die Abb. 6, 7, 8.

Die resultierende Störungsverteilung errechnet sich nach der Formel:

$$c_{u\varrho} = -\frac{2}{\pi}\sum_{Z=\mathrm{II}}^{Z=\mathrm{VIII}}\int_{+1}^{-1} c_{uw}\,\frac{\sqrt{1-u_I^2}}{r_1\,r_2}\cos\varepsilon\left|\frac{d\zeta}{dw}\right| d\,u_I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

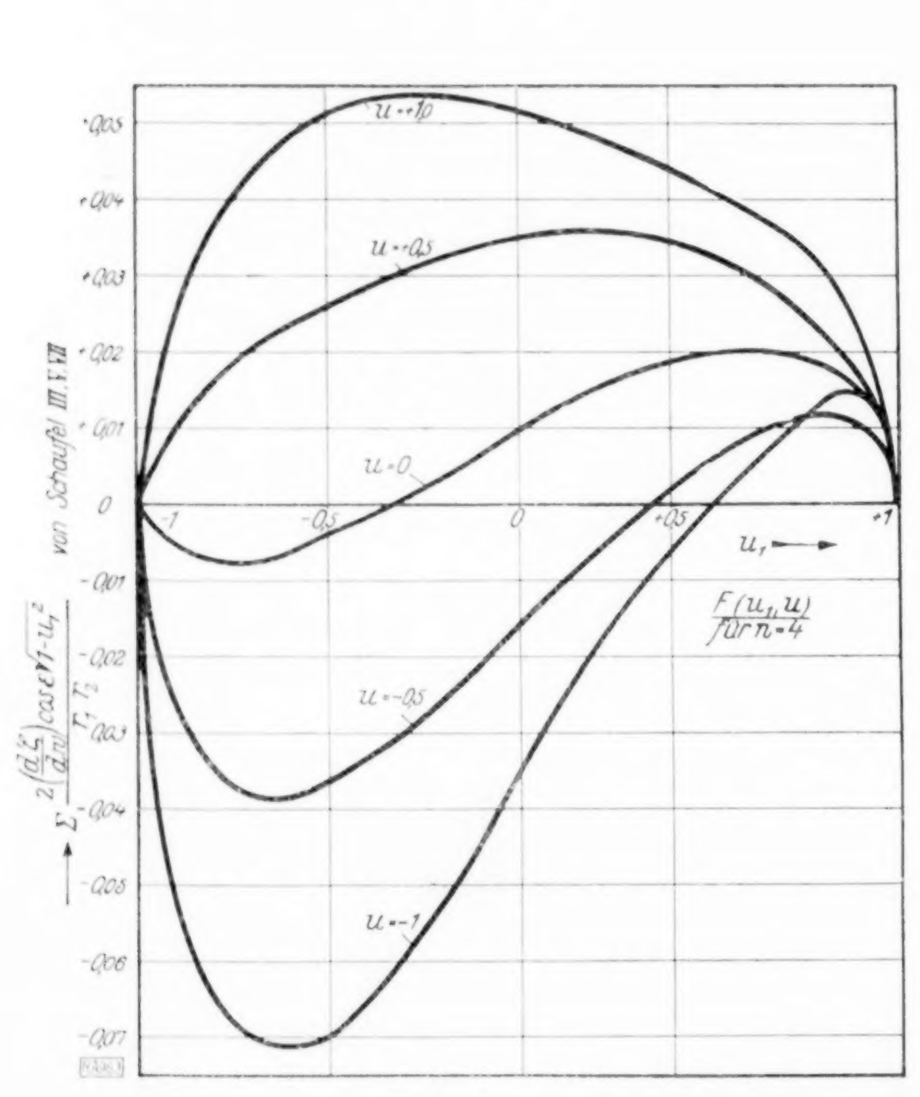


Abb. 7.

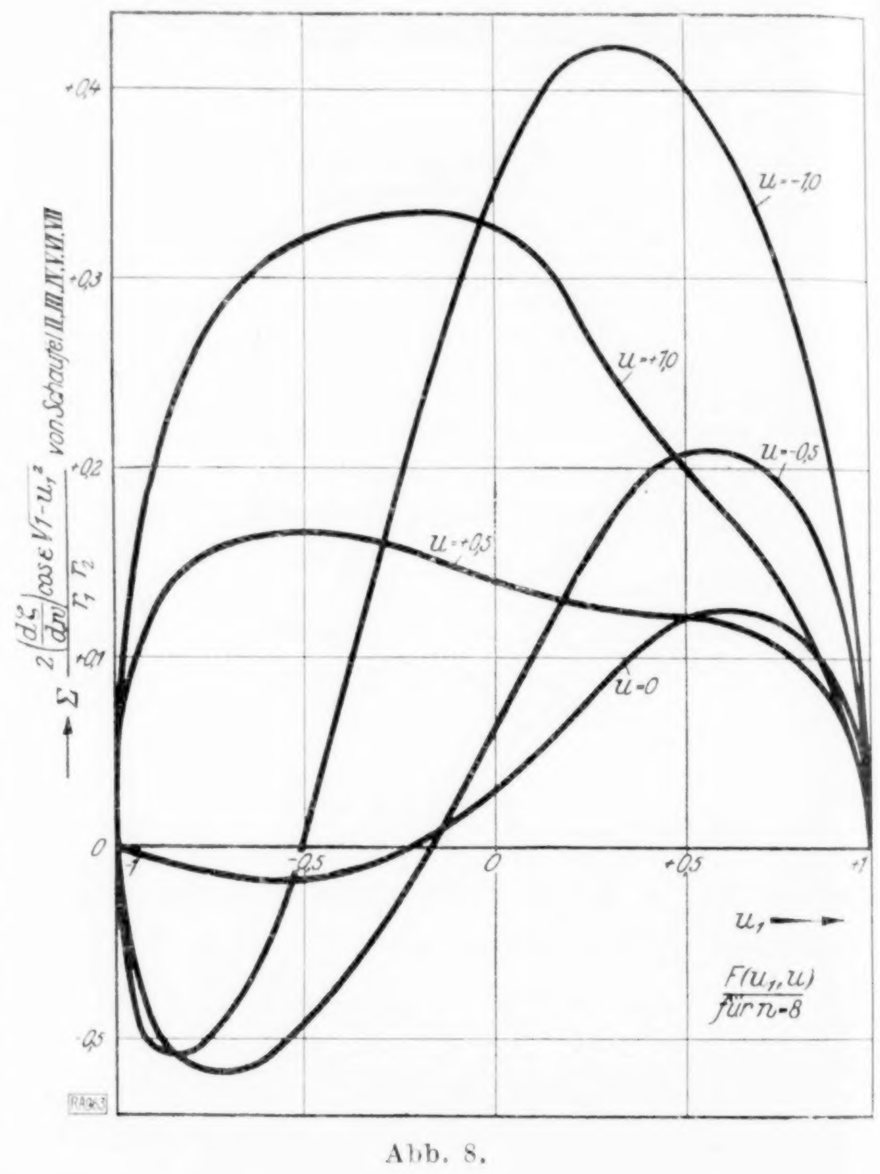


Abb. 8.

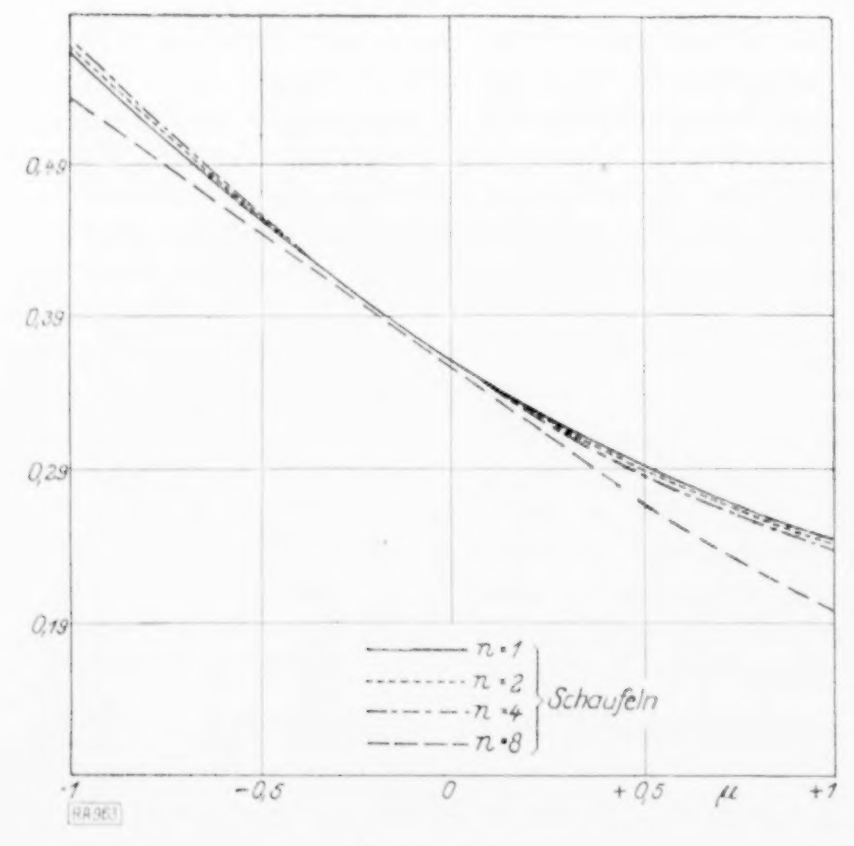


Abb. 9.

4. Anwendung auf die einzelnen Teilströmungen der allgemeinen Kreiselradströmung. Im folgenden soll eine von außen nach innen gehende Strömung durch ein feststehendes Gitter (Leitapparat) und eine solche durch ein rotierendes Gitter (außen beaufschlagte Turbine) bestimmt werden. Wie in den angegebenen früheren Arbeiten werden vorhandene Leitapparate durch Potentialwirbel in der Achse bzw. im Unendlichen ersetzt; (anders ausgedrückt: Leitapparate werden entweder in der Achse konzentriert oder ins Unendliche abgerückt gedacht). Demgemäß werden die folgenden Teilströmungen behandelt.

a) Reine Durchflußströmung von außen nach innen. Schaufeln ruhend, Senke im Gittermittelpunkt. An einer einzigen Schaufel ruft

eine Senke in Punkt D (Abb. 4) mit dem Potential $\Phi_Q = \frac{Q}{2\pi} \ln (w - w_0)$ folgende c_n-Verteilung[1]) hervor:

$$c_{n1} = \frac{Q}{2\pi} \frac{v^0}{(u_0 + u_i)^2 + v_0^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

(ohne Rücksicht auf Vorzeichen!) In Abb. 9 ist die ausgezogene Linie die Darstellung dieser Verteilung. Eine entgegengesetzt gleiche c_{nI}-Verteilung muß durch eine Quellverteilung an der Schaufel erzeugt werden. Deren Potential[2]) ist in der ζ-Ebene sofort in Form eines bestimmten komplexen Integrales angebbar (vgl. Abschn. A, Ziff. 3). Infolge des bekannten Zusammenhanges zwischen w- und ζ-Ebene ist es dann aber auch in der w-Ebene bekannt[3]). Es soll mit Φ_Q, c_{n1} bezeichnet werden.

Sind mehrere Schaufeln angeordnet, so ist zunächst an jeder derselben die eben bestimmte Quellverteilung anzubringen, um in erster Annäherung die Schaufeln zu Stromlinien zu machen. Diese erste Korrektur ruft also an jeder Schaufel zunächst diejenige c_n-Verteilung hervor, welche die von der Senke herrührende vernichtet, darüber hinaus aber eine neue Störung c_{n2}. Diese kann nach Gl. (10) (Abschn: B, Ziff. 3c) berechnet werden, da ja die in dieser Gleichung stehenden c_n-Komponenten bekannt sind (sie sind den c_n-Komponenten von Gl. (11) entgegengesetzt gleich). Die Berechnung geschieht in der Weise, daß jeder Wert der c_n-Verteilung mit den entsprechenden Werten der resultierenden Einflußlinien multiplizlert, die entsprechenden Werte in Kurven für die verschiedenen Parameterwerte u aufgetragen werden und durch Planimetrieren das Integral und damit die Größe der Störung ermittelt wird. Die neue Störungsverteilung c_{n2} muß durch eine neue Quellverteilung an jeder Schaufel beseitigt werden, deren komplexes Potential mit Φ_Q, c_{n2} bezeichnet sei. Die Verteilung c_{n2} wird nun ebenso behandelt, wie vorher c_{n1} und liefert eine weitere Störung c_{n3}, zu deren Beseitigung eine neue Quellverteilung nötig ist mit dem Potential $\Phi_Q\, c_{n3}$. Die resultierende Strömung wird dann durch die Reihe der Potentiale

$$\Phi = \Phi_Q + \sum_1^\infty \Phi_Q, c_{ni} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

angegeben. Das erste Glied rechts stellt die ungestörte Strömung einer Senke im Gittermittelpunkt dar, in jedem Gliede der Reihe macht sich der Einfluß der Störungen an allen z Schaufeln bemerkbar.

In den Abb. 10a bis 10c ist der Rechnungsgang für acht Schaufeln veranschaulicht. Es zeigt sich eine sehr rasche Abnahme der c_{ni}, so daß außer der durch die Zentralquelle gegebenen c_{n1}-Verteilung nur noch drei weitere Glieder berechnet sind. In Abb. 9 ist die resultierende, dem Potential Gl. (12) entsprechende Quellverteilung in Form der durch sie definitiv wegzuschaffenden Störungsverteilung $\sum_1^4 c_{ni}$ dargestellt. Die Größe $\frac{Q}{2\pi}$ ist $= q$ gesetzt.

b) Strömung eines Potentialwirbels im Gittermittelpunkt. Der Rechnungsgang bietet nichts prinzipiell Neues. Die »erste wegzuschaffende c_n-Verteilung« hat das Gesetz

$$c_{n1} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{u_0 + u_I}{(n_0 + u_I)^2\, v_0^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Abb. 11 gibt das Resultat der Rechnung in gleicher Weise wie Abb. 9 für die Senke im Gittermittelpunkt.

c) Zirkulation um die Schaufeln. Auch hier ist wieder die »erste wegzuschaffende C_n-Verteilung« zu bestimmen. Dies geschieht unter Heranziehung der ζ-Ebene. Besteht dort um den Einheitskreis I' (Mittelpunkt M, Abb. 2) eine Zirkulation Γ_s, so ruft sie an den Bildschaufeln II' bis VIII' C_n-Komponenten hervor von der Größe

$$c_{n\zeta} = \frac{\Gamma_s}{2\pi} \cdot \frac{\sin \psi}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

---

[1]) Der Index w für c_n wird von nun an, wenn kein Irrtum möglich, fortgelassen.

[2]) Dieses Potential wurde in den früheren Arbeiten durch einen geschlossenen Ausdruck (mittels Spiegelung am Kreise) angegeben.

[3]) Es ist natürlich prinzipiell gleichgültig, in welcher Ebene — ob als Funktion von ζ oder w — man ein Potential angibt, das ja für entsprechende Punkte der beiden Ebenen den gleichen Wert haben muß.

(r = Abstand des Bildschaufelpunktes von M, ψ = Winkel der Bildschaufelnormalen mit Fahrstrahl r. Die Normalkomponente an den Schaufeln der W-Ebene ergibt sich aus Gl. (14) durch Multiplikation mit $\left|\frac{d\,\zeta}{d\,w}\right|$

$$c_{n\,w} = c_{n\,\zeta} \left|\frac{d\,\zeta}{d\,w}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

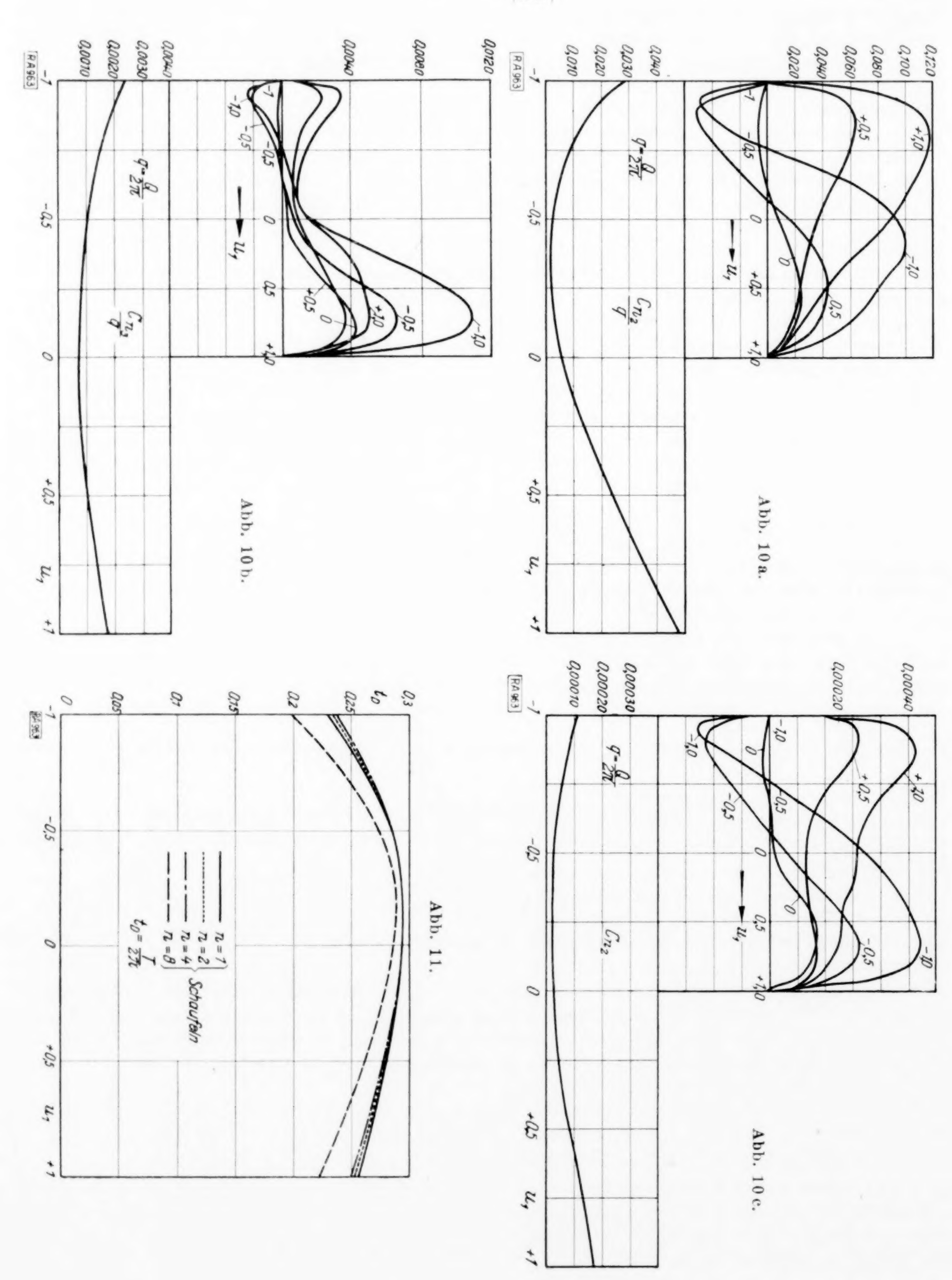


Abb. 10a.

Abb. 10b.

Abb. 10c.

Abb. 11.

$\frac{\sin\psi}{r}$ wird durch Abgreifen, $\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|$ rechnerisch ermittelt (B, 2). Damit hat man die c_n-Verteilungen, die von der Zirkulation um die Schaufel I an den andern erzeugt werden. Durch die gleiche Ueberlegung, wie in B, 3c für die resultierenden Einflußlinien angestellt, ergibt sich nun, daß die an allen Schaufeln gleiche, durch die gemeinsame Wirkung aller Schaufelzirkulationen an jeder Schaufel erzeugte c_n-Verteilung durch Summation der von Schaufel I an den andern hervorgerufenen c_n-Werte für gleichliegende Punkte entsteht. Diese c_n-Verteilung ist in Abb. 12 in den ausgezogenen Linien dargestellt; die für das komplexe Potential in der ζ-Ebene einzusetzende c_n-Verteilung ergibt sich durch den gleichen Rechnungsgang wie unter a) und b) und ist in den punktierten, gestrichelten und strichpunktierten Linien wiedergegeben.

Gegenüber den Fällen a) und b) besteht hier der Unterschied, daß schon die erste wegzuschaffende c_n-Verteilung von der Schaufelzahl abhängig ist (bei der Schaufelzahl $z = 1$ ist sie Null).

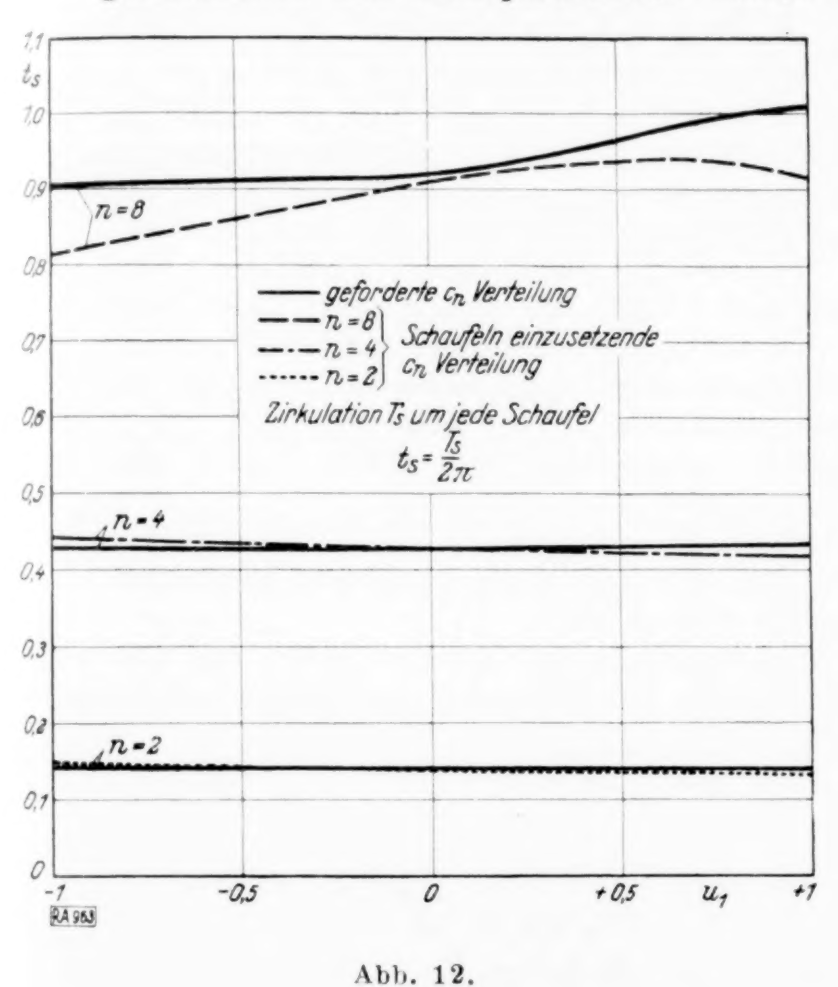


Abb. 12.

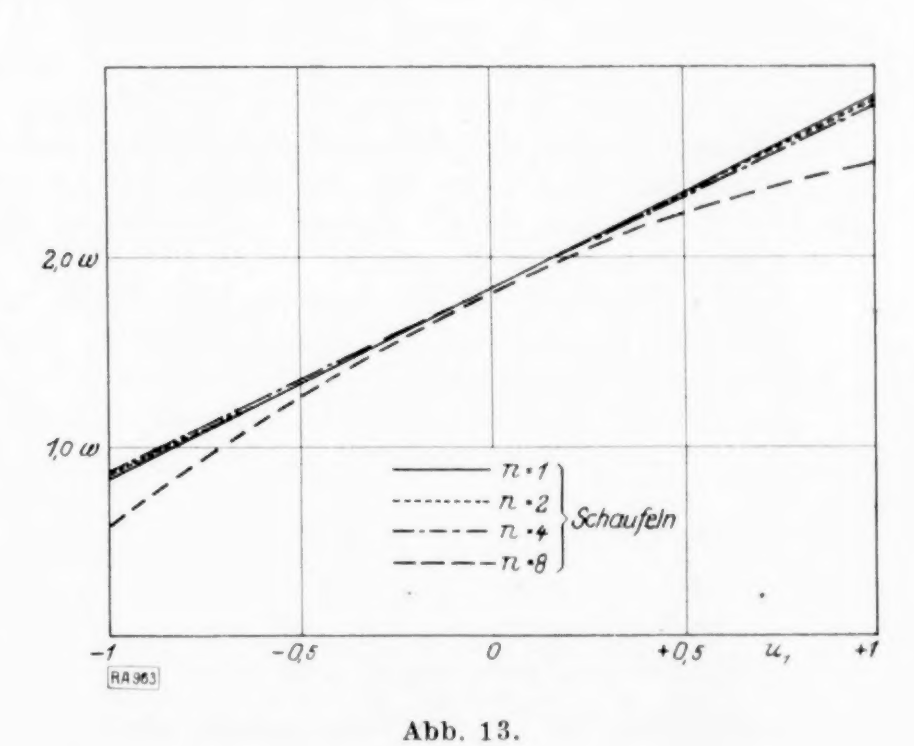


Abb. 13.

d) Verdrängungsströmung. Hier ist zunächst eine c_n-Verteilung, nämlich

$$c_n = r \cdot \omega \cdot \cos\alpha = \omega \cdot v_0 \text{ (vgl. } A, 2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

unmittelbar gegeben, die hier, da ein ursprüngliches Randwertproblem zweiter Art vorliegt, nicht durch eine entgegengesetzt gleiche fortgeschafft werden muß, sondern deren Potential unmittelbar (also ohne Wechsel des Vorzeichens) in der ζ-Ebene angebbar ist. Dann aber sind wieder, wie oben, die Störungen an den Schaufeln zu berechnen und die Potentiale der entgegengesetzt gleichen c_{ni}-Verteilungen zu ermitteln. Abb. 13 zeigt das Resultat.

5. Zusammensetzung der Teilströmungen. Bestimmung der bisher freien Konstanten. Durch die beschriebenen Rechnungen werden in Form von Reihen die komplexen Potentiale der einzelnen Teilströmungen gewonnen. Man hat

$$\left.\begin{aligned} \Phi_Q &= \frac{Q}{2\pi} \lg(w - w_0) + \text{Reihe; Quelle oder Senke im Gittermittelpunkt} \\ \Phi_\Gamma &= \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot i \ln(w - w_0) + \text{Reihe; Wirbel im Gittermittelpunkt} \\ \Phi_{\Gamma_s} &= \frac{\Gamma_s}{2\pi}\, i \lg \zeta^{1)} + \text{Reihe; Schaufelzirkulationen} \\ \Phi_V &= \text{Reihe; Verdrängungsströmung} \end{aligned}\right\} \quad (17).$$

---

[1]) Dieses Glied kann in dieser einfachen Form nur als Funktion von ζ angegeben werden; vergl. Anm. 3 auf S. 475.

Die Reihenglieder sind bestimmte Integrale von der in Gl. (1) (A, 3) gegebenen Form. Die von den einzelnen Potentialen am Kreisumfang herrührenden Geschwindigkeiten sollen entsprechend mit C_Q, C_Γ, C_{Γ_s}, C_V bezeichnet werden. Da die Potentiale bzw. den Q, Γ, Γs, ω proportional sind, so kann man die Geschwindigkeiten auch so schreiben:

$$C_Q' \cdot Q, \qquad C_\Gamma' \cdot \Gamma, \qquad C_{\Gamma_s}' \cdot \Gamma s, \qquad C_V' \cdot \omega.$$

Die so definierten Proportionalitätsfaktoren können für jeden Punkt der ζ-Ebene aus den ermittelten Potentialen errechnet werden. Wir tun dies insbesondere für die Punkte $\zeta = \pm 1$, die den Schaufelenden entsprechen. Soll an beiden Schaufelenden die Geschwindigkeit endlich bleiben (stoßfreies, d. h. relativ tangentiales Anströmen und relativ tangentiales Abströmen), so muß, da $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|$ für $\zeta = \pm 1$ null wird, c für beide Kreispunkte ebenfalls $= 0$ werden. Dies liefert die Bedingung

$$C_Q' \cdot Q + C_\Gamma' \cdot \Gamma + C_{\Gamma_s}' \cdot \Gamma s + C_V' \cdot \omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

mit den Werten C' für $\zeta = \pm 1$, also zwei Bedingungsgleichungen, aus denen man zwei Konstanten bestimmen kann, wenn man die übrigen festsetzt. Verzichtet man auf stoßfreies Anströmen, so bleibt nur eine Bedingungsgleichung übrig, also nur eine Konstante bestimmbar. In erster Linie interessiert Γs für relativ tangentiales Abströmen, also endliche Geschwindigkeit für $\zeta = \pm 1$. Denn mit Γs ist das Drehmoment des Rades proportional; dieses kann somit als abhängig von der Schaufelzahl bestimmt und mit dem bekannten für ein Rad mit unendlicher Schaufelzahl verglichen werden. Dies ist hier geschehen und zwar für die beiden bereits oben genannten Fälle, nämlich:

Erster Fall: Fester Leitapparat. Radiale Zuströmung von außen. (Also ohne Zirkulation; $\Gamma + \Gamma s = 0$.)

Zweiter Fall: Turbine von außen beaufschlagt und zwar in dem Sinn, in dem sich der Leitapparat des ersten Falles in Bewegung setzen würde. Stoßfreies Anströmen. (Also mit Zirkulation: $\Gamma'' = \Gamma + \Gamma s$.)

Die Resultate sind in den Abb. 14 und 15 dargestellt, die Kurven geben das Verhältnis des Drehmomentes zu dem für unendlich große Schaufelzahl.

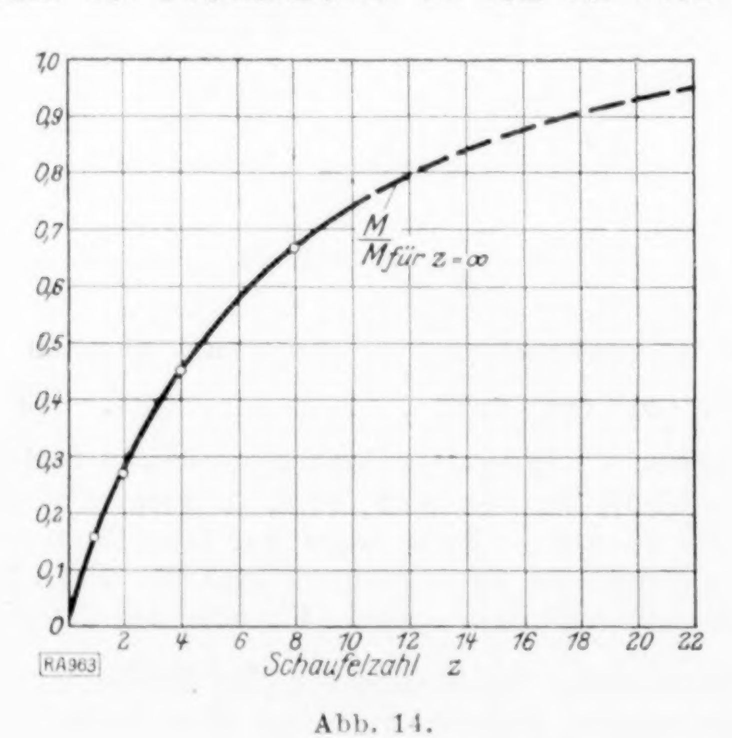


Abb. 14.

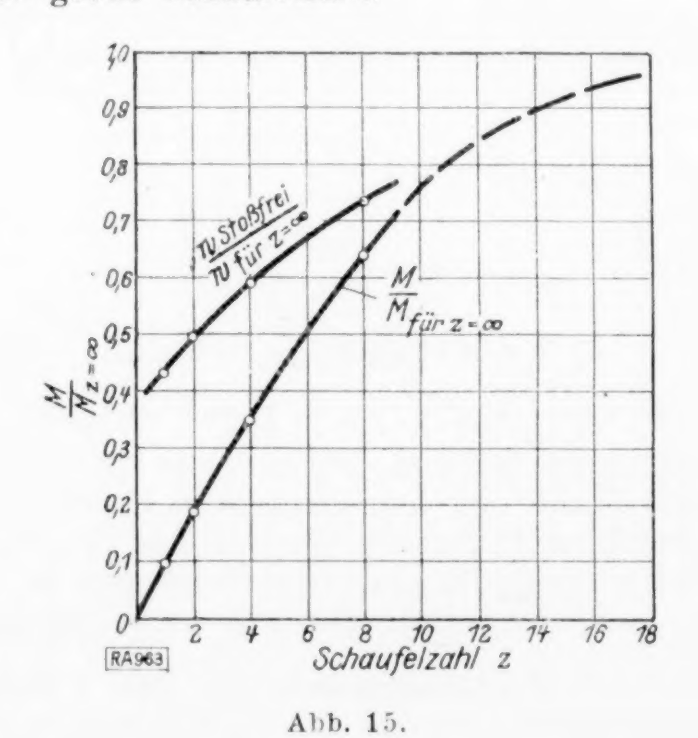


Abb. 15.

6. Vereinfachte Aufstellung der Bedingungsgleichung (18). Wenn man sich darauf beschränkt, die Bedingungsgleichung (18) zu lösen, so braucht man die durch die Gl. (17) gegebenen Potentiale, welche das ganze Strömungsfeld beschreiben, nicht auszurechnen, sondern zunächst nur die Geschwindigkeitsverteilung am Einheitskreise und letzten Endes von dieser nur die Werte für $\zeta = \pm 1$. Die Verteilung am Kreise — damit ist jetzt die der Gesamtgeschwindigkeit gemeint! — ist das Abbild der Verteilung an Schaufel I. Diese hängt im allgemeinen außer von der Wirbelsenke im Gittermittelpunkt und von der Zirkulation um die Schaufel I selbst auch von den in B 4, a—d ermittelten, von den verschiedenen Teilströmungen »induzierten« Quellverteilungen an allen Schaufeln, nicht nur von den an Schaufel I selbst ab. Für die Schaufelenden an Schaufel I aber, für die

wir uns bei der Aufstellung der Bedingungsgleichung (18) allein interessieren, ergibt sich folgendes: Die Geschwindigkeiten dort werden durch die Quellverteilungen an Schaufel I ∞ groß, während die an den andern Schaufeln für sie nur endliche Beiträge liefern. Die Ermittlung der entsprechenden Geschwindigkeiten an den Kreispunkten $\zeta = \pm 1$ erfolgt durch Multiplikation mit $\left|\frac{d w}{d \zeta}\right| = \sin \varphi = 0$. Infolgedessen liefern allein die den einzelnen Teilströmungen entsprechenden, an Schaufel I induzierten Quellverteilungen endliche Beiträge zu den Geschwindigkeiten an den Kreispunkten $\zeta = \pm 1$. Um also die linke Seite von Gl. (18) aufzustellen, braucht man nur an Schaufel I die bekannten, durch die Abschnitte B 4, a—d bestimmten Einzelquellverteilungen anzubringen. Wir stellen sie wieder durch die ihnen entsprechenden c_{u_w}-Verteilungen dar (unter Berücksichtigung der Vorzeichen!). Damit reduziert sich die Aufgabe darauf, zu einer gegebenen c_{u_w}-Verteilung an Schaufel I die entsprechende $c_{u\zeta}$-Verteilung am Einheitskreise auszurechnen und die von dieser in den Punkten $\zeta = \pm 1$ erzeugten Gesamtgeschwindigkeiten c_ζ zu ermitteln. Diese Aufgabe ist für einen beliebigen Punkt der ζ-Ebene durch den Ansatz der Gl. (7) gelöst. Mit den Bezeichnungen der Abb. 16 wird daraus für den Punkt $\zeta = \pm 1$:

$$d c_\zeta = \frac{c_{u\zeta} \cdot d\varphi}{\pi} \cdot \frac{\Delta s}{r_2} = \frac{c_{u_w} \cdot \sin\varphi \, d\varphi}{\pi} \cdot \frac{\Delta s}{r^2}.$$

Mit

$$\Delta s = 2\sqrt{1 - u_I^2}, \quad \sin\varphi = \sqrt{1 - u_I^2}, \quad r^2 = (1 + u_I)^2 + 1 - u_I^2, \quad u_I = \cos\varphi, \quad d u_I = -\sin\varphi \cdot d\varphi$$

ergibt sich:

$$d c_\zeta = -\frac{c_{u_w}}{\pi} \sqrt{\frac{1 - u_I}{1 + u_I}} \cdot d u_I$$

und

$$c_\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} c_{u_w} \sqrt{\frac{1 - u_I}{1 + u_I}} \cdot d u_I \text{ für } \zeta = -1.$$

Analog ergibt sich

$$c_\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} c_{u_w} \sqrt{\frac{1 + u_I}{1 - u_I}} \cdot d u_I \text{ für } \zeta = +1.$$

Mit diesen Formeln sind die Werte C_Q', C_Γ', $C_{\Gamma s}'$, C_V in Gl. (18) gerechnet[1]). Bei der Berechnung von $C_{\Gamma s}'$ darf man nicht vergessen, den von der Zirkulation um Schaufel I herrührenden Betrag der Geschwindigkeit am Kreisumfang, nämlich $\frac{\Gamma_s}{2\pi}$ mit zu berücksichtigen.

7. Weitere Verwendung der Methode. Schlußbemerkung. Für die Behandlung von Parallelgittern ergibt sich kein prinzipieller Unterschied. Die in Gl. (10) stehende Summe ist über unendlich viele Schaufeln auszudehnen. Dabei wird der Einfluß der entfernter liegenden rasch klein, so daß es genügt, ihn durch eine Restbetrachtung abzuschätzen.

Das Zeichnen von Stromlinienbildern nach der entwickelten Methode wäre, wenn man die Stromfunktion erst errechnen müßte, zunächst nicht viel weniger mühsam, als nach den früheren. Es gelingt aber in vielen Fällen sicher, entweder in der ζ- oder der w-Ebene die ermittelten Quellverteilungen durch geschickt angeordnete diskrete Quellen und Senken (ev. auch durch Wirbelpaare) zu ersetzen; in diesen Fällen kann man sich das Zeichnen durch die Anwendung der Maxwellschen Methode (Diagonalziehen) wesentlich erleichtern. Auch die Rechnung kann manchmal durch solche angenäherte Darstellung von Quellensenkverteilung mittels diskreter Singularitäten (im Innern der Konturen!) vereinfacht werden[2]). Hierauf soll aber nicht näher eingegangen, sondern nur nochmals (vergl. Anmerk. zu B 6a) darauf hingewiesen werden, daß im Falle einer Einschaufel-

[1]) Für die Auswertung durch Planimetieren können die uneigentlichen Integrale auf Integrale über endlich bleibende Funktionen zurückgeführt werden, z. B. durch die Substitution $\sqrt{1 \pm u_I} = \zeta$.

[2]) In rohester Weise geschieht dies dadurch, daß man die Schaufeln durch Wirbelpunkte ersetzt. Siehe Eck: Werft, Reederei und Hafen 24. Feiner ist das Verfahren, die Schaufeln durch Wirbelflächen zu ersetzen. Siehe Schilhansl: Näherungsweise Berechnung von Auftrieb und Druckverteilung in Flügelgittern. Jahrb. d. Wiss. Ges. für Luftfahrt 27.

strömung die Potentiale der nach unserer Methode einzusetzenden Quellverteilungen in geschlossener Form durch die Potentiale der am Einheitskreis gespiegelten Wirbelquelle bzw. -senke im Unendlichen bzw. im Gittermittelpunkt ersetzt werden können.

Ob solche Näherungen auch ausreichen, um Geschwindigkeits- und Druckverteilung unmittelbar an den Schaufeln zu bestimmen, kann nur von Fall zu Fall entschieden werden. Wenn man mit diesen Näherungen nicht auskommt, so wird der Föttingersche Vektorintegrator [1]) gute Dienste leisten, der ja gerade im vorliegenden Falle nicht an Näherungen gebunden ist, sondern zu einer gegebenen Belegungscharakteristik für einen beliebigen Aufpunkt der Potentialfunktion bzw. sogar die Geschwindigkeit anzugeben gestattet.

Weiterhin läßt sich der eine Teil der Methode, nämlich die konsequente Umwandlung aller Randwertprobleme in solche zweiter Art, auch auf dreidimensionale Probleme anwenden. Die konforme Abbildung auf eine ebene Strömung kann dabei gelegenlich — zur Darstellung der Strömung in gewissen Schichten — als Hilfsmittel verwendet werden.

Auch das kompliziertere Problem der Strömung durch eine Kombination von Leit- und Laufrad läßt sich mit der Methode behandeln.

Daß auch mit unserer Methode nur die Strömung der idealen Flüssigkeit ermittelt wird, darf ihr ebenso wenig wie den früheren zum Vorwurf gemacht werden. Die theoretische Forschung kann heute noch nicht anders vorgehen, als zunächst die »Potentialströmungen« ermitteln und dann — etwa nach den Gedankengängen der Prandtlschen Grenzschichtentheorie und unter Zuhilfenahme der Erfahrung über turbulente Geschwindigkeitsverteilungen — ihre Umbildung unter der Wirkung der Reibung abschätzen. 963

Vorträge der Prager Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Die folgende Zusammenstellung umfaßt 24 Vortragsauszüge, die von den Vortragenden unserer Hauptversammlung in Prag freundlichst zur Verfügung gestellt wurden.

1. Über singuläre Punkte des ebenen Spannungszustandes.

Von **L. FÖPPL** in München.

Bei der experimentellen Untersuchung ebener Spannungszustände mit Hilfe von polarisiertem Licht treten Punkte besonderer Art auf, die im Isoklinenfeld dadurch sofort in Erscheinung treten, daß alle Isoklinen hindurchlaufen [2]). In diesen Punkten sind die beiden Hauptspannungen einander gleich oder, was auf dasselbe hinausläuft, keine Schubspannungen vorhanden und somit ist in diesen Punkten der optische Effekt null, so daß sie und ihre nächste Umgebung der experimentellen Untersuchung mit Hilfe dieser Methode besondere Schwierigkeiten bereiten. Um so einfacher gestaltet sich ihre rechnerische Behandlung. Man unterscheidet singuläre Punkte im Innern des Körpers und solche, die am Rande liegen. Es wurden zunächst nur die singulären Punkte im Innern behandelt und zwar die erster und zweiter Ordnung, wobei besonderes Gewicht auf die systematische Einteilung der verschiedenen Arten von singulären Punkten gelegt worden ist. Als Methode zur rechnerischen Behandlung wurde das Verfahren mittels der Airyschen Spannungsfunktion verwendet, wobei als Anfangspunkt des Koordinatensystems der singuläre Punkt gewählt und die Spannungsfunktion nach steigenden Potenzen der Koordinaten entwickelt worden ist.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist folgendes:

Was den singulären Punkt 1. Ordnung betrifft, so gruppieren sich die Hauptspannungslinien um den singulären Punkt derart, daß drei durch den singulären Punkt laufende Gerade als Asymptotenlinien für je eine Schar der Hauptspannungslinien auftreten. Von diesen drei Asymptoten können aber auch zwei imaginär werden. Es zerfallen demnach die singulären Punkte 1. Ordnung in solche mit drei reellen Asymptoten, die man etwa erster Art nennen kann, und solche mit nur einer reellen Asymp-

[1]) Föttinger: Die Entwicklung der Vektorintegratoren zur maschinellen Lösung von Potential- und Wirbelproblemen. Zeitschrift f. techn. Physik 1928, Nr. 1.

[2]) Siehe L. Föppl: Untersuchung ebener Spannungszustände mit Hilfe der Doppelbrechung, Bayer. Ak. d. W., 1928. — Ferner: Mitteilungen aus dem Mech.-Techn. Laboratorium der Technischen Hochschule München, III. Folge, 34. Heft, herausgegeben von L. Föppl.

tote, die dementsprechend **zweiter Art** genannt werden würden. Die Isoklinen sind hier die sämtlichen Geraden durch den Nullpunkt[1]).

Bei den singulären Punkten 2. Ordnung muß man von vornherein unterscheiden, ob die durch den singulären Punkt laufenden Isoklinen Gerade sind wie beim Punkt erster Ordnung oder ob sie Kurven 2. Ordnung sind. Für symmetrisch gelegene Parabeln als Isoklinen wurde dieser letztere Fall berechnet und gezeichnet. Er tritt beim gelochten Zugstab bei bestimmtem Verhältnis von Lochdurchmesser zu Stabbreite tatsächlich auf. Im ersteren Fall, wo die Isoklinen die Geraden durch den Nullpunkt sind, liefert der singuläre Punkt 2. Ordnung im allgemeinen 4 Asymptoten, von denen wieder zwei imaginär sein können. Der Fall des symmetrischen singulären Punktes 2. Ordnung wurde an Beispielen behandelt[2]). 23, 1

2. Ersatz einer homogenen isotropen Scheibe mit beliebiger Poissonschen Konstanten durch ein Fachwerk.

Von **MICHAEL SADOWSKY** in Berlin-Wilmersdorf.

Ein Fachwerk soll homogen und isotrop heißen, wenn seine durch Interpolation ergänzten Verschiebungen und seine durch ideelle Schnitte definierten Spannungen den 9 Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} X_x = 2\,G\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}, \text{ und 2 ähnliche Gleichungen,} \\ X_y = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ und 2 ähnliche Gleichungen,} \\ \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \text{ und 2 ähnliche Gleichungen} \end{array}\right\} \quad . \quad (1)$$

genügen. Ein Fachwerk soll homogen und isotrop hinsichtlich des ebenen Falles

$$Z_x = Z_y = Z_z = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

heißen, wenn die 5 Gleichungen gelten

$$\left.\begin{array}{lll} X_x = 2\,G\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}, & & Y_y = 2\,G\left\{\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}, \\ X_y = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), & \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, & \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad (3).$$

Jedes homogene und isotrope Fachwerk ist auch hinsichtlich des ebenen Problems (2) homogen und isotrop, aber nicht umgekehrt!

Die Gl. (1) bzw. (3) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Fachwerk homogen und isotrop ist, bzw. hinsichtlich des ebenen Problems (2) homogen und isotrop. Diese Gleichungen bilden also das Kriterium für die erwähnten Fachwerkeigenschaften.

Das elastische Potential f hat die Form

$$2\,f = \lambda\,(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\,\mu\,(x_x{}^2 + y_y{}^2 + z_z{}^2 + {}^1/_2\, y_z{}^2 + {}^1/_2\, y_x{}^2 + {}^1/_3\, x_y{}^2) \quad . \quad (4).$$

Für den ebenen Fall (2) wird

$$2\,f = \frac{4\,\mu\,(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\,\mu}\,(x_x{}^2 + y_y{}^2) + \frac{4\,\lambda\,\mu}{\lambda + 2\,\mu}\,x_x\,y_y + \mu\,x_y{}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Dabei ist die Poissonsche Konstante

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Mit Hilfe der Gl. (4) läßt sich folgender Satz beweisen, der im wesentlichen schon von Poisson ausgesprochen war:

Satz 1: Ein jedes **räumliches** Fachwerk, unabhängig von seiner besonderen Konstruktion, welches im Sinne des Kriteriums (1) homogen und isotrop ist, hat die Poissonsche Konstante $\sigma = {}^1/_4$.

[1]) Die rechnerische Durchführung mit Bildern der verschiedenen Arten, siehe L. Föppl: Ueber singuläre Punkte des ebenen Spannungszustandes, erschienen in Heft 34 der »Mitteilungen aus dem Mech.-Techn. Laboratorium der Technischen Hochschule München«.

[2]) Siehe L. Föppl: Der singuläre Punkt 2. Ordnung, erscheint demnächst im 35. Heft der »Mitteilungen aus dem Mech.-Techn. Laboratorium der Technischen Hochschule München«.

Mit Hilfe der Gl. (5) läßt sich der Satz beweisen:

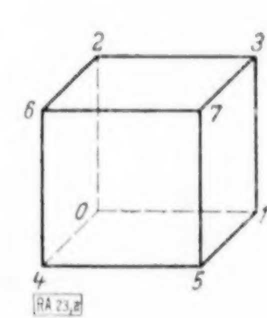
Satz 2: Ein jedes ebenes Fachwerk, unabhängig von seiner besonderen Konstruktion, welches im Sinne des Kriteriums (3) homogen und isotrop hinsichtlich des ebenen Falles (2) ist, hat die Poissonsche Konstante $\sigma = {}^1/_3$.

Es gibt aber auch räumliche Fachwerke, die hinsichtlich des ebenen Problems (2) homogen und isotrop im Sinne des Kriteriums (3) sind. Diese Fachwerke können dann eine beliebige Poissonsche Konstante haben! (Zulässigkeitsbereich $-1 < \sigma < {}^1/_2$). Das Kriterium (1) ist dann selbstverständlich nicht erfüllt.

Beispiel: Das Fachwerk besteht aus lauter identischen Würfelzellen von der Kantenlänge a, die in den beiden Richtungen 01 und 02 (vgl. Abbildung) aneinander-

Tabelle.

Stab	15,04 26,37	25,07 34,61	24,60 35,17 27,63 05,14	01,13 32,20 45,57 76,64	03,12 47,65
Querschnitt	f_1	f_3	f_2	$f_1 + f$	$f_2 + f'$



gereiht sind. Das Fachwerk liegt somit zwischen zwei Ebenen im Abstande a. Der Elastizitätsmodul des Stabmaterials ist E, die Querschnitte der einzelnen Stäbe sind in der vorstehenden Tabelle angegeben. Für den Fall (2) ist das Kriterium (3) erfüllt, und es ist

$$\sigma = \frac{4 f_1 + \sqrt{2} f_2 + 6 f}{16 f_1 + 4 \sqrt{2} f_2 + 18 f} \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (7)$$

und (für das Fachwerk)

$$G = \frac{E}{a^2}\left(2 f_1 + 2 f + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

23, 2

3. Über Spannungen und Formänderungen kreisringförmiger Membranen.

Von **E. SCHWERIN** in Berlin (AEG).

Trotz vielfacher Anwendung von kreis- bzw. kreisringförmigen Membranen für Reguliervorrichtungen und Instrumente ist bisher nur die kreisförmige Membran mit gleichmäßigem Oberflächendruck näherungsweise von A. Föppl[1]) und genau von Hencky[2]) untersucht worden, so daß eine Erweiterung der Theorie auf kreisringförmige Membranen mit Oberflächen- und Randbelastung wünschenswert erscheint. Zu diesem Zweck bringen wir zunächst durch Einführung der neuen Variabeln:

$$U = -\frac{\sigma_r}{E} \cdot \frac{r^2}{r_a^2} \sqrt[3]{32 \frac{E^2}{p^2} \cdot \frac{h^2}{r_a^2}}, \qquad x = \frac{r^2}{r_a^2} - \frac{r_i^2}{r_a^2}\left(1 - \frac{P}{\pi r_i^2 p}\right)$$

worin:

σ_r = Radialspannung,
E = Elastizitätsmodul,
h = Membrandicke,
r, r_i, r_a = veränderlicher bzw. innerer bzw. äußerer Halbmesser,
P, p = innere Rand- bzw. Oberflächenbelastung

die Grundgleichung des Problems auf die außerordentlich einfache Form:

$$U'' = \frac{x^2}{U^2}$$

und integrieren dieselbe durch Potenzreihen von x; wobei die Bedeutung jener einfachen Form besonders auch darin liegt, daß sie auch in Fällen ungenügender Reihenkonvergenz eine sehr bequeme graphische Behandlung des Problems gestattet. Auf Grund der ge-

[1]) A. Föppl; Vorlesungen über technische Mechanik, 1907, Bd. III, S. 298.

[2]) H. Hencky: Ueber den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 63 (1915), S. 311.

wonnenen Differentialgleichung wurde der Fall der ringförmigen, nur gleichmäßig belasteten, außen eingespannten, innen freien Membran vollkommen entwickelt und zahlenmäßig ausgewertet. Die Ergebnisse zeigen, daß der Spannungszustand um so gleichmäßiger wird, je schmaler die Membran im Verhältnis zum Außenradius ist; wird hingegen der Radius der Innenöffnung sehr klein, so zeigt sich dort ein örtlicher Spannungsanstieg, der im Grenzfall das Doppelte der Spannung in der undurchbohrten Membran beträgt, wodurch ein für biegungssteife Platten bekanntes Resultat auf dünne Membranen erweitert wird.

Für den Fall der nur durch eine Belastung des inneren Randes beanspruchten, beiderseits eingespannten Membran kann die Differentialgleichung des Problems durch Einführung der neuen Variabeln:

$$V = -\frac{\sigma_r}{E}\frac{r^2}{r_a^2}\sqrt[3]{\frac{32\,\pi^2 E^2 h^2 r_a^2}{P^2}}; \qquad \xi = \frac{r^2}{r_a^2}$$

auf die äußerst einfache Form gebracht werden:

$$V'' = \frac{1}{V^2}.$$

Diese Gleichung kann in geschlossener Form streng integriert werden und liefert als allgemeine Lösung:

$$\xi = C_1(\psi - \sin\psi) + C_2 \quad (C_1, C_2 = \text{Integrationskonstanten}),$$

worin:

$$\psi = 2 \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{-\frac{2\sqrt[3]{C_1^2}}{V} - 1},$$

so daß der bisher einzige streng lösbare Fall des unendlich langen, gleichmäßig belasteten Membranstreifens nicht mehr allein steht. Die Partikularlösung $V = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}\xi^2}$ würde für den besonderen Fall: Querkontraktionsziffer $\nu = 1/3$ die Grenzbedingung der Einspannung innen und außen streng befriedigen.

Die Ergebnisse zeigen auch hier bei kleiner Innenöffnung einen beträchtlichen örtlichen Spannungsanstieg, hingegen gleichmäßigere Spannungsverteilung bei schmalen Membranen. Die Meridiankurven der deformierten Membran gehen mit wachsendem Oeffnungsverhältnis von der nahezu parabolischen in die fast gradlinige Form über; eigentümlich ist jedoch, daß sich für die Radial- und Tangentialspannungen, die Radialdehnung und Durchbiegung nahezu vollständige Unabhängigkeit des Verlaufs vom Oeffnungsverhältnis der Membran ergibt. Die gegen die Radialdehnungen sehr kleinen Ringdehnungen zeigen einen charakteristischen, ein Maximum aufweisenden Verlauf; die Gestalt der deformierten Membran ist trichterähnlich. Zugleich zeigt sich, daß das erwähnte Partikularintegral den Grenzfall: $\nu = 1/3$ darstellt, dem sich die Lösungen für kleinere Werte von ν mehr und mehr nähern, und über den hinaus unter der hier gemachten Voraussetzung axialer Symmetrie des Spannungszustandes reelle Lösungen nicht mehr möglich sind. 23, 3

4. Über den Einfluß der inneren Reibung auf die Stabilität rotierender Wellen.

Von **H. REISSNER** in Berlin-Charlottenburg.

1. Nach einer einleitenden Bemerkung über den zweckmäßigsten Ansatz für die innere Reibung bei der Formänderung von Wellenstahl weit unter der Elastizitätsgrenze werden die Schwingungsgleichungen einer rotierenden, kreiszylindrischen, schweren und gleichmäßig mit Masse belegten Welle aufgestellt. Diese hier für ein ruhendes Koordinatensystem formulierten Gleichungen enthalten außer den schon bekannten Gliedern noch dämpfende Biegungsmomente, die erstens durch die Aenderungsgeschwindigkeit der Wellenkrümmung unabhängig von der Rotation, zweitens durch unveränderte Krümmung bei ruhender Biegungslinie infolge Rotation entstehen.

Die Integration für kleine Schwingungen führt dann zu den folgenden Ergebnissen:

2. Bei Fortlassung des Eigengewichts, der Kreisel- und der Reibungskräfte besteht bei gelenkig gestützter Welle eine unendliche Reihe von je zwei Eigenschwingungen mit

voneinander unabhängigen Amplituden in zwei zueinander senkrechten Richtungen und von der bekannten kritischen Frequenz

$$\omega_0 = \frac{n^2 \pi^2}{2} \frac{k}{l} \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

wo l die Spannweite, k der Trägheitsradius des Querschnittes E und ϱ Elastizitätsmodul bzw. Dichte des Wellenbaustoffes sind.

Durch Berücksichtigung der Kreiselkräfte spaltet sich diese Frequenz in zwei sehr nah benachbarte und zwar in

$$\omega_1 = \omega_0 \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega_0 \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa},$$

wo

$$\varkappa = \frac{n^2 \pi^2}{2} \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

den Einfluß der Kreiselkräfte angibt.

Die Amplituden der beiden Eigenschwingungen in zwei zueinander senkrechten radialen Richtungen sind nun nicht mehr voneinander unabhängig, sondern setzen sich so zusammen, daß die eine Eigenschwingung in Kreisen, die andere in einer mit der Eigenfrequenz rotierenden Ebene verläuft.

Das Kritischwerden der Drehzahl kann hier zunächst nur so gedeutet werden, daß bei der kritischen Drehzahl die Periode der störenden Kräfte mit der Periode der Eigenfrequenz zusammenfällt.

Das Eigengewicht äußert sich bei dieser idealen dämpfungsfreien Schwingung nur in der Aenderung der Mittellage, um welche die Schwingungen erfolgen, aus der geraden Linie in die durch Eigengewicht gebogene. Bis dahin sind die Ergebnisse bekannt.

3. Bei der Berücksichtigung der inneren Reibung ist es nun zunächst wegen der einfacheren Erfüllung der Stützbedingungen zweckmäßig, den Einfluß des durch die Welle fortgeleiteten Drehmoments zu vernachlässigen, obgleich seine Abwesenheit eine Abnahme der Drehzahl bedingen wird.

Die Integration ergibt eine komplexe Frequenz, deren imaginärer Teil die Eigenfrequenzen unverändert wie ohne innere Reibung und deren reeller Teil zwei Dämpfungsexponenten liefert von der Form $\frac{\mu_1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \pm 1\right)$,

wo ω_0 die kritische Winkelgeschwindigkeit, ω die gerade vorhandene Winkelgeschwindigkeit der Welle und μ_1 die Größe $\frac{\mu \omega}{E}$ bedeuten, wobei μ den Koeffizienten der inneren Reibung gegeben durch $\sigma = \mu \dot{\varepsilon}$ angibt.

Die Form der 4 Eigenschwingungen, bedingt durch die Amplitudenverhältnisse, ist dieselbe wie vorher, nämlich je eine kreisförmige und je eine radial rotierende.

Von den beiden Paaren von Eigenschwingungen wird infolge der Dämpfungsexponenten das eine Paar sehr stark, das andere Paar viel schwächer gedämpft und zwar derart, daß bei dem Zusammenfallen von Eigenfrequenz mit Drehfrequenz die Dämpfung des einen Paares Null und darüber hinaus sogar negativ wird.

Dies wirft insofern ein neues Licht auf den Grund des Kritischwerdens der Drehfrequenz, als man nun sagen kann, daß die Eigenschwingungen zwar immer bei jeder Drehzahl vorhanden sind, aber erst bei Zusammenfallen von Eigen- und von Drehfrequenz ihre starke Dämpfung verlieren und dadurch kritisch werden.

4. Um den Einfluß des Drehmoments (d. h. eines angreifenden Moments an dem einen Ende der Welle und eines widerstehenden an dem anderen Ende) zu studieren, wurden nun zunächst wiederum die Dämpfungskräfte fortgelassen. Es ergaben sich kleine Schwingungen mit einer sehr wenig veränderten Eigenfrequenz und Schwingungsform, die nichts Besonderes zeigen; es sei denn die bekannte Stabilitätsgrenze einer sehr dünnen und langen Welle, die auf Torsion belastet ist (eines Drahtes) und als Schraubenlinie ausknickt, ein Fall, der außerhalb des Interesses der gestellten Aufgabe liegt.

5. Fügt man die innere Reibung hinzu, so ist es zweckmäßig, zur mathematischen Vereinfachung nach den möglichen stationären Bewegungszuständen zu fragen, bei denen die Welle mit ihrer Drehzahl in gebogener Form umläuft. Es ergibt sich eine räumliche rotierende Biegungslinie und die Nennerdeterminante der Stützbedingungen liefert die kritische Drehzahl, die unter normalen Verhältnissen nur sehr wenig unter der kritischen Drehzahl wie bei (2) liegen wird.

6. Schließlich wurde dann noch der Einfluß des Eigengewichts bei Kreiselkräften, innerer Reibung und Drehmoment in der Weise behandelt, daß die Grenze zwischen den folgenden zwei Zuständen gesucht wurde:

Erstens ist der Zustand möglich, bei welchem der Einfluß des Eigengewichts überwiegt und die Welle in einer ruhenden (in sich rotierenden) räumlichen Biegungslinie durchhängt, indem die ursprünglich in einer senkrechten Ebene durchhängende Welle durch die innere Reibung etwas nach der Seite abgedrängt wird.

Zweitens entsteht bei Ueberwiegen dieser Seitenkräfte der inneren Reibung ein Zustand, bei dem die Welle mit ungleichförmiger Frequenz neben ihrer Rotation noch umläuft.

Die Form dieser räumlichen Biegungslinie wurde formelmäßig angegeben. Der Uebergang zwischen diesen beiden Zuständen muß eine weitere kritische Drehzahl bedeuten. Jedoch konnten in dem Vortrage noch keine Zahlenergebnisse über diese letzte Frage mitgeteilt werden. 23, 4

5. Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen mit Längsbelastung und Kreiselwirkung.

Von **K. KARAS** in Brünn.

Es hat sich gezeigt, daß die kritischen Drehzahlen rasch umlaufender Wellen außer von den Massen und der Welle noch von anderen Umständen in weitem Maße abhängen. Man hat festgestellt, daß die Uebertragung von Längskräften [1]), sowie die Kreiselmomente aufgekeilter Scheiben [2]) die kritischen Drehzahlen weitgehend verändern, sogar ihre Beeinflussung durch Drehmomente wurde erst kürzlich zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht [3]).

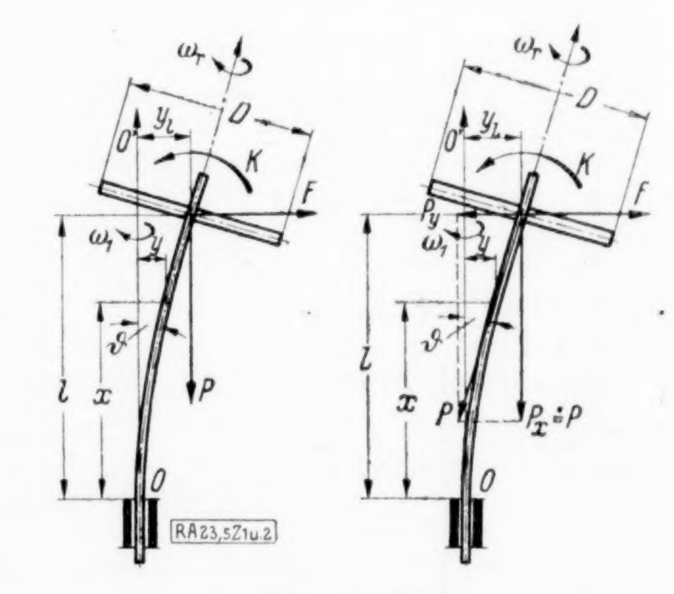


Abb. 1 und 2.

Hier sollen ganz kurz zunächst die fliegende Welle mit einer Schwungscheibe am Ende und sodann die dicht mit Scheiben besetzten verschieden gelagerten Wellen betrachtet werden. Im ersteren Falle soll noch unterschieden werden, ob die Längskraft P in Richtung der Einspanntangente (Abb. 1, Fall A) oder in Richtung der Endtangente (Abb. 2, Fall B) wirksam ist.

Ist $\omega = \omega_1$ die Drehschnelle bei synchroner Präzession im Gleichlauf, m die Scheibenmasse, Θ_d ihr Durchmesserträgheitsmoment, so ist nach Abb. 1 $F = m\, y_l\, \omega^2$ und $K = \Theta_d\, \omega^2 \vartheta$. Betrachtet man ferner die dimensionslosen Größen: $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $u = \frac{m\, l^3 \omega^2}{E J}$, $v = \frac{P l^2}{E J}$, $w = \frac{\Theta_d\, l\, \omega^2}{E J}$, so folgt nach Abb. 1 die Differentialgleichung:

$$\eta'' = v\,(\eta_1 - \eta) + u\,\eta_1\,(1 - \xi) - w\,\eta_1' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Integriert man (1) mit Beachtung der Randbedingungen $\eta_0 = \eta_0' = 0$ für $\xi = 0$ und setzt in dem Integral sowie in der daraus durch Ableitung nach ξ hervorgehenden Gleichung $\xi = 1$, so folgen zwei bzgl. η_1 und η_1' lineare homogene Gleichungen. Das Verschwinden der Systemdeterminante ergibt die erste der folgenden 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} u\,w\,(2 - \sqrt{v}\sin\sqrt{v} - 2\cos\sqrt{v}) + u\,(\sqrt{v}\sin\sqrt{v} - v\cos\sqrt{v}) - w\,v\sqrt{v}\sin\sqrt{v} - v^2\cos\sqrt{v} = 0 \\ u\,w\,(2 + \sqrt{v}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{v} - 2\,\mathfrak{Cof}\sqrt{v}) + u\,(-\sqrt{v}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{v} + v\,\mathfrak{Cof}\sqrt{v}) - w\,v\sqrt{v}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{v} - v^2\,\mathfrak{Cof}\sqrt{v} = 0 \\ u\,w \cdot {}^1/_{12} + u \cdot {}^1/_3 - w - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (2).$$

[1]) H. Melan, Zeitschr. d. österr. Ing. Arch. Ver. 69. Jahrg. 1917, S. 610, 619 u. Z. d. V. d. I. Bd. 73, 1929, S. 205. R. v. Mises, Monatshefte für Math. u. Physik, 22. Jahrg. 1911, S. 33. E. Schwerin, Zeitschr. ang. Math. Mech. 5. Bd. 1925, S. 101, K. Karas, H.D.I.-Mitteilungen d. Hauptvereines deutscher Ingenieure in d. C. S. R. Jahrg. 17 (7), S. 95, 119, 167.

[2]) A. Stodola, Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen, 15, 1918, S. 253, 264, 269 und 1920, S. 1. R. Grammel, Z. d. V. d. I. 1920, S. 911 und 1929, S. 1114.

[3]) R. Grammel, Festschrift zum 70. Geburtstag A. Stodolas. O. Füssli, Zürich, 1929.

Die zweite Gl. (2) gilt für Zugkräfte, die dritte für $v = 0$, also fehlende Längskräfte und stellt ein längst bekanntes Ergebnis dar [1]). Setzt man in (2) $u = w = 0$, so bleibt $\cos\sqrt{v} = 0$, also die Eulerschen Knicklasten. Verfährt man ebenso bzgl. Fall B (Abb. 2), so erhält man drei zu (2) analoge Gleichungen, in denen aber im letzten Glied $\cos\sqrt{v}$ bzw. $\mathfrak{Cof}\sqrt{v}$ fehlt. Berechnet man nach (2) für verschiedene Annahmen von w die Werte u, so findet man, daß sie im Falle A für wachsende Druckkräfte ab-, im Falle B zunehmen. Sie verschwinden im Falle A für $v = \pi^2/4$, also die kleinste Eulersche Knicklast, im Falle B werden sie für $w = 0$, also fehlende Kreiselwirkung für $v = 20 \cdot 19$, für vorhandene Kreiselwirkung für $v = 4\pi^2$, unendlich groß, woraus folgt, daß die fliegende Welle ohne oder mit Kreiselwirkung keine kritischen Drehzahlen besitzt, wenn an ihrem freien Ende obige Knickkräfte in Richtung ihrer Endtangente wirksam sind.

Bei der beiderseits frei auflagernden, dicht mit Scheiben besetzten Welle gehorcht die Auslenkung η der Integralgleichung

$$\eta(\xi) = u\int_0^1 K(\xi,\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau\,,$$

worin der Kern

$$\left.\begin{aligned} K(\xi,\tau) &= \frac{1}{v}\left[\frac{1}{\sqrt{v}}\{\sin(\sqrt{v}\,\xi)\cos(\sqrt{v}\,\tau) - \cot\sqrt{v}\sin(\sqrt{v}\,\xi)\sin(\sqrt{v}\,\tau)\} - \xi + \tau\xi\right] \text{ für } \xi \leqq \tau \\ &= \frac{1}{v}\left[\frac{1}{\sqrt{v}}\{\cos(\sqrt{v}\,\xi)\sin(\sqrt{v}\,\tau) - \cot\sqrt{v}\sin(\sqrt{v}\,\xi)\sin(\sqrt{v}\,\tau)\} - \tau + \tau\xi\right] \text{ für } \xi \geqq \tau \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Hierin ist mit μ (Masse je Längeneinheit der Welle) $u = \frac{\mu\, l^4\, \omega^2}{E J}$. Der Kern $K(\xi,\tau)$ in (3) übergeht für fehlende Längskraft in den bereits von R. v. Mises angegebenen Kern. Aus der Symmetrie des Kernes folgt die Realität des Eigenwertes u für jeden Wert von v. Führt man in (3) den Ansatz $\eta(\tau) = \sin n\pi\tau$ ein, so ergibt sich, da sich dieser als Eigenfunktion der Integralgleichung (3) darstellt, aus (3) die Beziehung:

$$u + v\,(n\pi)^2 = (n\pi)^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

(4) ergibt in einem Koordinatensystem, in dem die Längskraft v als Abszisse, die kritische Drehschnelle $\sqrt{u}$ als Ordinate erscheint, eine Schar von Parabeln.

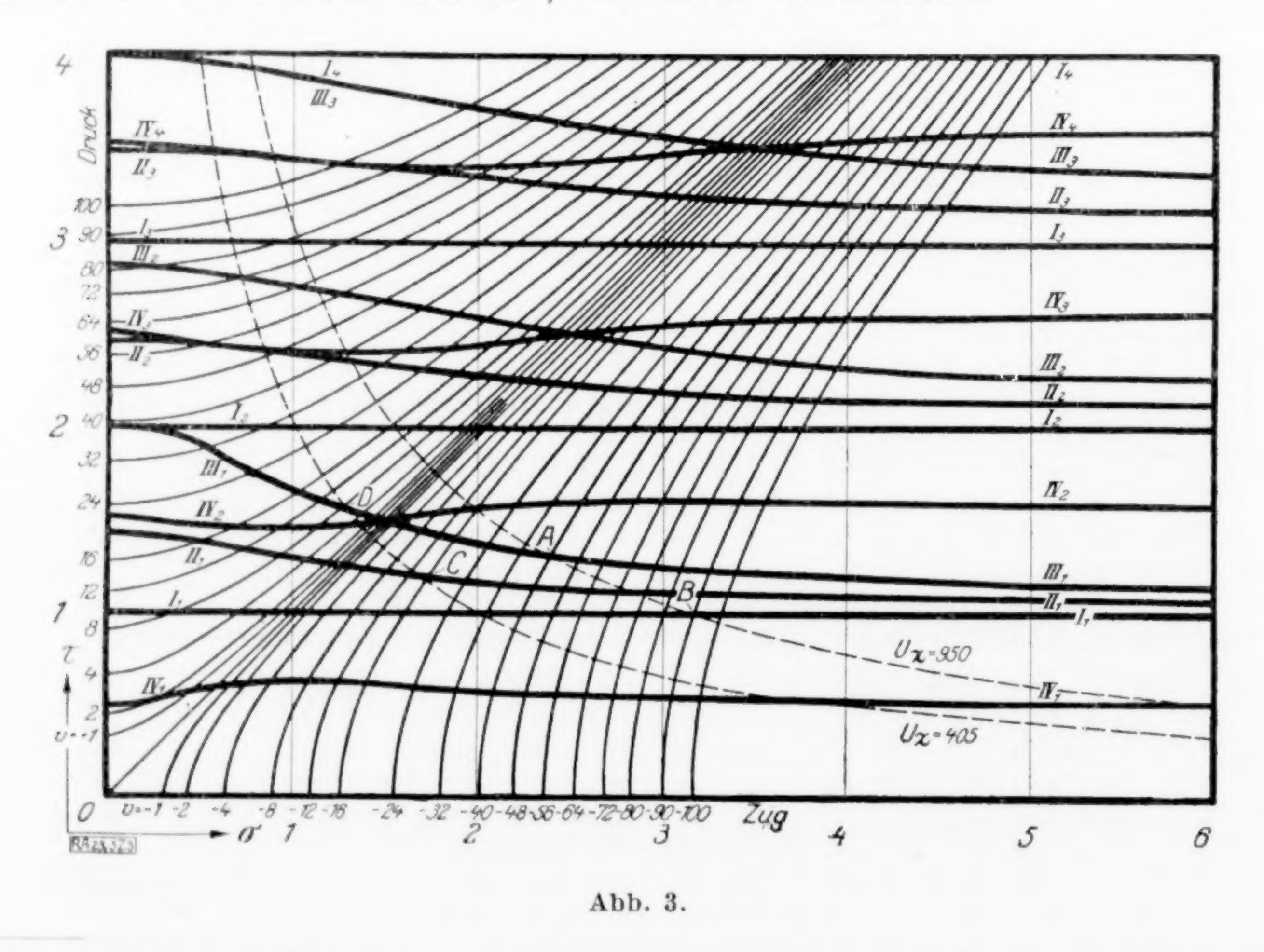


Abb. 3.

[1]) A. Stodola, Dampfturbinen, Springer, Berlin, 5. Aufl. 1922, S. 365, Gl. (10) und (11) und S. 368, Gl. (23).

Mit $w = \frac{\Theta_d\, l^2\, \omega^2}{E\, J}$ gehorcht im allgemeinen Falle der stetig belasteten Wellen die Auslenkung η der Differentialgleichung:

$$\eta^{IV} + (v - w)\,\eta'' - u\,\eta = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Bezeichnet man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit $\pi^2 \sigma^2$ bzw. $-\pi^2 \tau^2$, so folgen die beiden Gleichungen:

$$u = \pi^4 \sigma^2 \tau^2 \quad \ldots \quad (5), \qquad \beta^2 (\sigma^2 - \tau^2) = \sigma^2 \tau^2 - v\, \beta^2/\pi^2 \quad \ldots \quad (6).$$

Hierin bedeutet $\beta = \frac{4\, l}{D\, \pi}$, d. i. die vierfache Wellenlänge geteilt durch den Scheibenumfang. Da sich zu jedem Falle eine weitere Beziehung zwischen σ und τ aus den Randbedingungen ergibt, so folgt aus dem Schnittpunkt der dieser Beziehung entsprechenden Grammelschen Schaulinie mit der zu einer bestimmten Längskraft v und Kreiselwirkung β gehörigen Kurve (6) ein Punkt mit den Koordinaten $\sigma_k\, \tau_k$, wozu dann (5) die kritische Drehschnelle u ergibt. Für $\beta = \infty$, also fehlende Kreiselwirkung ergeben sich die in Abb. 3 ersichtlichen gleichseitigen Hyperbeln mit den Winkelhalbierenden als Asymptote. In Abb. 3, in der die Grammelschen Schaulinien mit den den vier Lagerungsarten entsprechenden römischen Ziffern versehen sind, liegen die reellen Scheiteln dieser Hyperbeln für Zugkräfte auf der Abszissenachse, für Druckkräfte auf der Ordinatenachse. Bei Beachtung der Kreiselwirkung bedecken die Kurven (6) in doppelter Mannigfaltigkeit die Ebene, doch können sie leicht durch einfache Konstruktionen ermittelt werden, wenn nur eine Kurve der Schar gezeichnet vorliegt[1]). 23, 5

6. Zur praktischen Berechnung von Biegungsschwingungen umlaufender Maschinenaggregate.

Von **G. ZERKOWITZ** in München.

Nachstehendes Verfahren ermöglicht die Berechnung kritischer Drehzahlen, und zwar auch solcher 2. und gegebenenfalls 3. Ordnung, umlaufender Maschinenaggregate bei beliebiger Massenanordnung und Lagerung. Hierzu denkt man sich den Läufer, insoweit baulich keine Einzelscheiben vorliegen, durch Schnitte senkrecht zur Achse in einzelne Scheiben zerlegt. Die Masse der k-ten Scheibe sei m_k, das auf die Wellenachse bezogene Trägheitsmoment A_k, das auf eine Querachse durch den Schwerpunkt bezogene B_k; $A_k/B_k = q_k$. Ist ω die Drehschnelle des Aggregates, y_k und τ_k Durchbiegung und Neigung der Wellenachse unter m_k, die im Punkte x_k angeordnet sei, so ist $F_k = m_k\, y_k\, \omega^2$ und $K_k = \omega^2\, \varrho_k\, B_k\, \tau_k$, worin bei Gleichlauf $\varrho_k = q_k - 1$, bei synchronem Gegenlauf $\varrho_k = -(q_k + 1)$ ist. Für n-Massen bestehen die n Gleichungen

$$y_i = \omega^2 \left(\Sigma\, \alpha_{ik}\, m_k\, y_k - \Sigma\, \alpha_{ik}'\, \varrho_k\, B_k\, \tau_k\right) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

worin α_{ik}, α_{ik}' die Einflußzahlen für eine Einheitskraft und für ein Einheitsmoment im Punkte x_k sind. Denkt man sich die einzelnen Gleichungen (1) mit den Gewichten $m_i\, g = G_i$ multipliziert und addiert und bedeuten f_k und x_k Durchbiegung und Neigung der durch die Gewichte im ruhenden Zustande hervorgerufenen elastischen Linien an der Stelle x_k, so erhält man für die erste Kritische die von Grammel[2]) aufgestellte Beziehung

$$g\, \Sigma\, m_k\, y_k = \omega^2 (\Sigma\, m_k\, y_k\, f_k - \Sigma\, \varrho_k\, B_k\, \tau_k\, x_k) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

oder ohne die Kreiselglieder

$$g\, \Sigma\, m_k\, y_k = \omega^2\, \Sigma\, m_k\, y_k\, f_k \quad \ldots \ldots \quad (2a).$$

Nach Kull setzt man zur Bestimmung der niedrigsten kritischen Drehschnelle ω_I in (2a) $y_k \equiv f_k$. Diese Näherung reicht bei freitragenden Enden, sowie bei durchgehenden Wellen nicht aus und versagt ganz für höhere kritische Drehzahlen.

Betrachten wir zunächst zwei beliebig gelagerte Einzelmassen m_1, m_2, so können wir uns die fliehkraftelastische Linie y dadurch zustande gekommen denken, daß als Wirkung der ersten Masse 'die massen- oder gewichtselastische Linie f_1 beibehalten wird,

[1]) Entsprechen gleichseitige Hyperbeln mit $\sigma = 0$, $\tau = 0$ als Asymptoten. Aus den Schnittpunkten A und B der zu $u_k = 950$ gehörigen Hyperbel (5) mit den Grammelschen Schaulinien III_1 und I_1 ist ersichtlich, daß diese Drehzahl bei den bzgl. Lagerungsorten bei Zugkräften $v = -40$ bzw. -88 entsteht. Aehnliches gilt bzgl. C und D.

[2]) Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. I (1922).

während für die zweite Masse die gewichtselastische Linie mit einem Faktor φ multipliziert wird; wir setzen also für die Einsenkungen unter m_1 und m_2

$$y_1 = f_{11} + \varphi f_{12} \qquad y_2 = f_{21} + \varphi f_{22} \quad \ldots \ldots \ldots (3).$$

Den Wert φ bestimmt man nun so, daß die y-Linie der zu erwartenden fliehkraftelastischen Linie entspricht; man bestimmt also φ aus

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{f_{11} + \varphi f_{12}}{f_{21} + \varphi f_{12}} = \frac{\alpha_{11} m_1 (f_{11} + \varphi f_{12}) + \alpha_{12} m_2 (f_{21} + \varphi f_{22})}{\alpha_{21} m_1 (f_{11} + \varphi f_{12}) + \alpha_{22} m_2 (f_{21} + \varphi f_{22})} \quad \ldots \ldots (4)$$

$$\varphi_{I,II} = \frac{-(f_{11} - f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} - f_{22})^2 + 4 f_{12} f_{21}}}{2 f_{12}} \quad \ldots \ldots \ldots (4a).$$

Diese beiden φ-Werte, in (3) eingeführt, liefern die wahren Einsenkungen y_1 und y_2, die nunmehr in (2a) einzusetzen sind und damit die beiden Drehschnellen ω_I und ω_{II} ergeben.

Die aufgestellte Regel läßt sich auf zwei Massenkomplexe oder Belastungen, z. B. eine Welle mit überhängendem Ende, übertragen. Da für eine zusammenhängende Belastung, deren Einzelmassen gleichsinnig wirken, die Kullsche Methode[1]) sehr genau ist, ermittelt man für jede der beiden Belastungen die entsprechende gewichtselastische Linie; vergl. Abb. 1 (Welle mit überhängendem Ende). Man greift nun in beiden Feldern je eine Stelle, etwa in der Nähe der größten Durchbiegungen, heraus und ermittelt aus diesen Einsenkungen nach (4a) die φ-Werte; alsdann erhält man die kritischen Drehschnellen aus der Beziehung

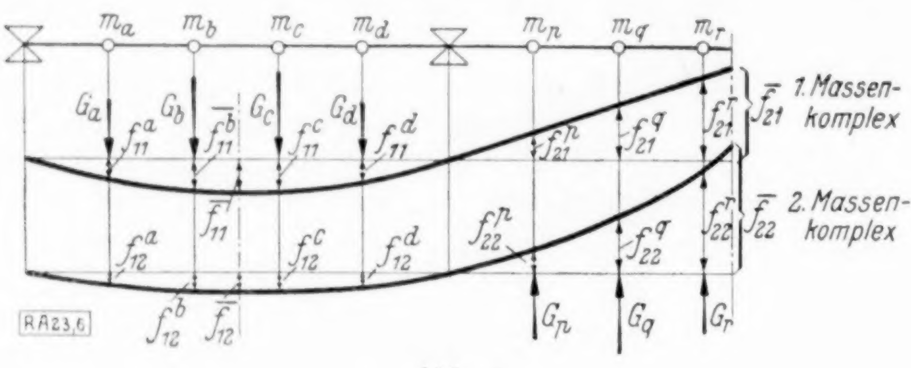


Abb. 1.

$$f_{I,II} = \frac{\sum_{\mu=a}^{d} m^\mu (f_{11}^\mu \pm f_{12}^\mu)(f_{11}^\mu + \varphi_{I,II} f_{12}^\mu) + \sum_{\nu=p}^{r} m^\nu (f_{21}^\nu \pm f_{22}^\nu)(f_{21}^\nu + \varphi_{I,II} f_{22}^\nu)}{\sum_{\mu=a}^{d} m^\mu (f_{11}^\mu + \varphi_{I,II} f_{12}^\mu) \pm \sum_{\nu=p}^{r} (f_{21}^\nu + \varphi_{I,II} f_{22}^\nu)} \quad (6),$$

indem man $\omega_{I,II}^2 = g/f_{I,II}$ setzt[2]). Will man die Kreiselglieder beachten, so geht man von (2) statt von (2a) aus. Bei drei Massenkomplexen, wie z. B. bei zwei überhängenden Enden oder bei vierfach gelagerter Welle, setze man die Einsenkung $y = f_1 + \varphi f_2 + \psi f_3$, d. h. man lasse die gewichtselastische Linie für die erste Belastung unverändert, während man die gewichtselastischen Linien der zweiten und dritten Belastung mit φ und ψ multipliziert. Statt (4) erhält man eine Gleichung 3. Grades, aus der die φ- und ψ-Werte und damit die drei möglichen kritischen Drehzahlen ermittelt werden. Sinngemäß verfährt man bei einer größeren Zahl von Belastungen. Hierdurch wird auch das lästige Divergieren bei entgegengesetzt wirkenden Belastungen vermieden, falls man, um die Genauigkeit weiter zu treiben, die y-Linie an Stelle einer nach »freiem Ermessen« zu wählenden ersten elastischen Linie heranzieht. 23, 6

7. Eine neue Singularitätenmethode für die Elastizitätstheorie.[3])

Von **P. NEMÉNYI** in Berlin.

(Aus dem Institut für technische Strömungsforschung, Technische Hochschule Berlin.)

In der eindimensionalen Balkentheorie sowie auch in der Theorie des Fachwerkes werden bekanntlich alle Einflußlinien nicht nur der Formänderung, sondern auch der inneren Kraftgrößen, als Biegelinien dargestellt. Dabei macht aber die bisherige Auffassung einen Unterschied zwischen statisch unbestimmten und statisch bestimmten Gebilden. Bei letzteren wird die »Durchbiegungslinie« einer aus dem vorgegebenen System

---

[1]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. Bd. 62 (1918), H. 18, 19.

[2]) Das + Zeichen bezieht sich auf f_I, das − Zeichen auf f_{II}. Eine eingehende Darstellung erscheint demnächst an anderer Stelle, wobei auch der Einfluß der Lage der Knotenpunkte untersucht wird.

[3]) Erscheint demnächst ausführlicher in dieser Zeitschrift.

abgeleiteten kinematischen Kette bestimmt, bei dem statisch unbestimmten aber wird das vorgegebene System durch Fortlassen des zu untersuchenden Gliedes in ein um eine Stufe weniger statisch unbestimmtes System verwandelt und die Einflußlinie als Biegelinie dieses Systems für einen ganz bestimmten Belastungsfall ermittelt.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist zunächst, die Darstellung der Einflußlinien von eindimensionalen Traggebilden auf eine einheitliche allgemeine Grundlage zu stellen, die zugleich die zwanglose Verallgemeinerung auf zwei- und dreidimensionale Aufgaben zuläßt. Zu diesem Zwecke wurde folgender Satz abgeleitet: Die Einflußlinie, Einflußfläche bzw. ganz allgemein das Einflußfeld jeder

Die den elastischen Wirkungen dual zugeordneten Singularitäten.

a) Bei dem Balken.

Ordnung	Wirkung	Singularität	
1	Durchbiegung	Einzellast	
2	Neigung	Einzelmoment	$Pd = M$
3	Biegemoment	»Doppelmoment«	$Pd^2 = S$
	Verdrillungsmoment	»Drehpaar«	$Nd = T$
4	Querkraft	»Doppelangriff«	$Pd^3 = U$

b) Bei der Platte.

Ordnung	Wirkung	Singularität	
1	Durchbiegung	Einzellast	
2	Neigung in x-Richtung	Einzelmoment	$Pd = M$
3	Krümmung in x-Richtung	»Doppelmoment erster Art«	$Pd^2 = S$
	Moment in x-Richtung	Ueberlagerung zweier »Doppelmomente erster Art«	$Pd^2 = S$
	Momentensumme	»Zentralmoment«	$Pd^2 = C$
	Verdrillungsmoment	»Doppelmoment zweiter Art«	$Pd^2 = T$
4	Querkraft in x-Richtung	»Doppelangriff erster Art«	$Pd^3 = U$
	Randstützkraft für einen zu »x« senkrechten Rand	»Doppelangriff zweiter Art«	$Pd^3 = U$

c) Bei der Scheibe.

Ordnung	Wirkung	Singularität	
1	Verschiebungsfeld $\begin{cases} u \\ v \end{cases}$	Einzellast	
2	Normalspannung in x-Richtung σ_x	»Zug-(Druck)Pol«	$Pd = S$
	Schubspannung in x-Richtung τ_{xy}	»Scherpol (Schere)«	$Pd = T$

$d \to 0$

inneren Kraftgröße (Spannung, Spannungsmoment, Querkraft usw.) läßt sich darstellen als Biegelinie, Biegefläche bzw. Verschiebungsfeld eines passend gewählten, an dem unveränderten Gebilde angebrachten Gleichgewichtssystems von äußeren Lasten bzw. des Grenzgebildes eines solchen Gleichgewichtssystems. Diese Grenzgebilde sind die neueingeführten Singularitäten (Lastsingularitäten).

Auf diese Weise kommt man dazu, jedem inneren Kraftbegriffe oder — noch allgemeiner — jedem Begriff einer elastischen Wirkung einen Singularitätenbegriff dual zuzuordnen. Die nebenstehende Tabelle stellt diese Zuordnung für Balken, Platten und Scheiben dar.

Durch die hierdurch gegebene Verallgemeinerung des »Last«begriffes wird eine weitgehende Verallgemeinerung des Maxwellschen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ermöglicht. Es seien nämlich r, s irgendwelche elastische Wirkungsbegriffe, R, S die denselben dual zugeordneten Singularitäten. Dann besteht eine Gegenseitigkeitsbeziehung, die sich unter Benutzung des Einflußlinien- (bzw. bei Platten des Einflußflächen-) Begriffes wie folgt ausdrücken läßt: Die Linie (die Fläche) der Wirkung s einer an der Stelle a wirkenden Singularität R stellt im passenden Maßstabe die Einflußlinie (Einflußfläche) für die Wirkung r an der festen Stelle a aus einer wandernden Singularität S dar.

In vielen Fällen führen die neuen Singularitäten zu sehr zweckmäßigen neuen Wegen zur tatsächlichen Ermittlung gewisser Einflußlinien oder Einflußflächen; so z. B. kann man aus den gefundenen neuen Zusammenhängen eine sehr einfache unabhängige Konstruktion der Einflußlinie für das Biegemoment, Querkraft usw. eines beliebigen Querschnittes eines Balken- oder Rahmentragwerkes ermitteln, oder die auf anderem Wege erhaltenen Einflußlinien schnell und unabhängig voneinander prüfen.

Eine viel wichtigere Anwendung der neuen Begriffsbildungen ist die einfache Lösung gewisser Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie auf grundsätzlich neuem Wege. Ein Doppelmoment bedingt nämlich einen Knick, ein Doppelangriff einen Sprung in der Biegelinie eines Balkens. Will man also ein eindimensionales Traggebilde mit freien Enden behandeln, so kann man in vielen Fällen von einem anderen den zu behandelnden in sich enthaltenden ausgehen, und an den als freie Enden gewünschten Stellen je ein Doppelmoment und einen Doppelangriff anbringen, deren Größe aus der Bedingung zu bestimmen ist, daß an diesen Stellen das Biegemoment und die Querkraft verschwinden müssen. Das einfachste Beispiel für die Zweckmäßigkeit dieser Behandlungsweise ist die Zurückführung eines Rahmentragwerkes mit vielen gleichen Feldern auf ein solches mit unendlich vielen gleichen Feldern, wobei man im allgemeinsten Fall vier lineare Gleichungen mit vier Unbekannten auflösen muß; die Ersparnis an Rechenarbeit gegenüber dem bekannten Verfahren ist in diesem Falle sehr beträchtlich. Viel mannigfacher sind die analogen Anwendungen der neuen Begriffe zur Lösung von Randwertaufgaben von Platten und Scheiben mit freien Rändern. Im allgemeinsten Falle wird man hier auf zwei simultane Integralgleichungen geführt, deren Kerne von den Wirkungsfunktionen der höheren Singularitäten gebildet werden. 23, 7

8. Über einige Anwendungen eines Unstetigkeitsfaktors in der Mechanik.

Von **HARRY SCHMIDT** in Köthen.

Den Gegenstand des Vortrags bildet die Erläuterung eines Integrationsverfahrens für lineare inhomogene (gewöhnliche oder partielle) Differentialgleichungen, das insbesondere für den praktisch häufig vorkommenden Fall eines stückweise konstanten Störungsgliedes von Nutzen ist. Dieses Verfahren basiert auf der in einer früheren Arbeit [1]) bewiesenen Relation

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{(z-z_0)\cdot f(z)}\,dz = \begin{cases} 2\pi i \cdot \sum\limits_{\sigma} \sum\limits_{\lambda=1}^{s_\sigma} e^{t z_\sigma} A_\lambda^{(\sigma)} \dfrac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t < 0, \end{cases}$$

in der $f(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen z bedeutet, deren reziproker Wert für $z \to \infty$ dem Betrage nach beschränkt bleibt, die ferner lediglich isolierte Nullstellen z_σ mit Realteilen kleiner als $a > 0$ besitzt, und für die schließlich in der Umgebung einer s_σ-fachen Nullstelle z_σ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Reihenentwicklung von der Form

$$\frac{1}{(z-z_0)\cdot f(z)} = \sum_{\lambda=1}^{s_\sigma} \frac{A_\lambda^{(\sigma)}}{(z-z_\sigma)^\lambda} + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa^{(\sigma)} \cdot (z-z_\sigma)^\varkappa$$

gilt, unter z_0 eine Zahl verstanden, deren Realteil gleichfalls kleiner als a ist. Für $f(z) = 1$ und $z_0 = 0$ erhalten wir die Beziehung

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t < 0, \end{cases}$$

und hiermit läßt sich nun das stückweise konstante Störungsglied $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einer linearen Differentialgleichung

$$L[w(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

in der Form

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_\nu \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} p_\nu \cdot \frac{e^{p_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot z}}{z}\,dz$$

schreiben, worin die p_ν feste Größen bedeuten, sowie unter $p_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ geeignet gewählte Funktionen der unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu verstehen sind. Ist dann

$$u_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_\mu F_\nu^{(\mu)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{e^{p_\nu^{(\mu)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot z}}{f_\nu^{(\mu)}(z)}$$

die den einschlägigen Anfangs- bzw. Randbedingungen genügende Lösung der Gleichung

$$L[u_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = e^{p_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) z},$$

so ergibt sich auf Grund des linearen Superpositionsprinzips als gesuchte Lösung zunächst der Ausdruck

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_\nu \sum_\mu p_\nu \cdot F_\nu^{(\mu)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p_\nu^{(\mu)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot z}}{z \cdot f_\nu^{(\mu)}(z)}\,dz,$$

der sich, falls die Funktionen $f_\nu^{(\mu)}(z)$ die erforderlichen Voraussetzungen erfüllen, durch Anwendung der eingangs notierten Relation in eine handliche Form bringen läßt.

Die Anwendungsmöglichkeiten des vorstehend skizzierten Rechnungsverfahrens auf statische und dynamische Probleme sind überaus mannigfaltig. Sie erstrecken sich u. a. auf die Theorie der Stoßerregung beliebiger schwingungsfähiger Systeme, auf die Behandlung von Biegungsaufgaben bei unstetigen Lastverteilungen sowie auf die Untersuchung der Wirkung plötzlicher Belastungsänderungen und beweglicher, zeitlich durchweg bzw. stückweise konstanter oder periodisch veränderlicher Lasten, worüber in einer Reihe von Arbeiten ausführlich berichtet werden soll. 23, 8

[1]) Harry Schmidt, Zeitschr. f. Phys. Bd. 39 (1926), S. 474.

9. Flügelschwingungen an Flugzeugen.

Von H. G. KÜSSNER in Berlin-Adlershof.

Schwingungserscheinungen an Flugzeugen, deren Ursache geringe Steifigkeit der Bauteile ist, werden häufig beobachtet. Während die durch Massenkräfte des Motors angeregten Schwingungen verhältnismäßig harmlos sind, erweisen sich die durch Luftkräfte angefachten Schwingungen der Flugzeugflügel als sehr gefährlich, da ihre Anregung aus der kinetischen Energie des ganzen Flugzeuges stammt.

Bei hoher Geschwindigkeit gerieten die Flügel mancher Flugzeuge in starke Schwingungen, die in vielen Fällen zum Bruch und Absturz führten. Erklärungen hierfür hat als erster Birnbaum in seiner Dissertation Göttingen 1922 geliefert[1]). Sie waren grundlegend für die in der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt durchgeführten Untersuchungen[2]).

Der Strömungsverlauf um den schwingenden Flügel hängt davon ab, welchen Weg in Flugrichtung der Flügel bei einer Schwingung zurücklegt, d. h. welche Wellenlänge die Schwingung hat. Ist die Wellenlänge groß ($>$ 30 Flügeltiefen), so wird sich eine annähernd stationäre Strömung um den Flügel ausbilden, die man leicht berechnen kann und die bisher die Grundlage für die Untersuchung angefachter Flügelschwingungen bildete. Bei Flugzeugen sind die angefachten Flügelschwingungen jedoch in der Regel kurzwellig und haben Wellenlängen von 3 bis 8 Flügeltiefen. Die instationäre Strömung um den schwingenden Flügel mit Querruder wurde daher exakt untersucht, und zwar für das ebene Flügelproblem mit paralleler Luftströmung und für harmonische Schwingungen.

Eine ebene, im Luftstrom schwingende Platte denken wir uns in ihrer Wirkung durch gebundene Wirbel ersetzt, welche ebenso wie die Flügelbewegung harmonische Funktionen der Zeit seien. Der schwingende Flügel erzeugt ständig freie Wirbel, welche mit dem Luftstrom wegschwimmen. Diese freien Wirbel sind nach dem Satz von der Erhaltung der Wirbelstärke aus den gebundenen Wirbeln leicht berechenbar. Wir bestimmen nun die Strömungsgeschwindigkeit an der Flügelkontur nach dem Biot-Savartschen Gesetz durch Integration der Wirbelwirkungen und vergleichen sie mit der tatsächlichen Flügelbewegung. Aus diesem Vergleich erhalten wir die gesuchte Verteilung der gebundenen Wirbel und damit die auf den schwingenden Flügel wirkenden Luftkräfte und Momente.

Die angefachten Flügelschwingungen entstehen durch Zusmmenwirken der Luftkräfte, Massenkräfte und elastischen Kräfte. Die Baustoffdämpfung des Flügels wird dadurch berücksichtigt, daß man sich bei einer Schwingung die Formänderungen den elastischen Kräften um einen kleinen Winkel nacheilend denkt, der $1/\pi$ des üblichen logarithmischen Dekrement ist. Als Schwingungskriterium dient das Verschwinden der Nennerdeterminante eines homogenen, linearen Gleichungssystems, das sämtliche Kräfte als hormonische Funktionen der Zeit enthält. Daraus ist die Schwingungsfrequenz und die kritische Geschwindigkeit bestimmbar. Die hier angewandte Methode ist ein Analogon zur atomistischen Wellenmechanik.

Der Flügel hat in der Regel drei Freiheitsgrade des Schwingens: Biegung, Drehung des ganzen Flügels, Ruderdrehung. Die komplexe Determinante ist dann 9 gliedrig. Angefachte Schwingungen entstehen nur, wenn wenigstens zwei Freiheitsgrade vorhanden sind.

Die für den Fall ebener Strömung gewonnenen Ergebnisse können näherungsweise auf den Flügel endlicher Spannweite übertragen werden, da die gegenseitige Störung der Strömung an verschiedenen Flügelpunkten der raschen Zirkulationsänderungen wegen nicht groß sein kann. Die Determinante des räumlichen Flügels sieht dann ähnlich aus wie die für ebene Strömung gebildete; die Elemente sind jedoch bestimmte Integrale. Diese Determinante muß wieder verschwinden, und zwar für alle Werte der in Richtung der Spannweite gemessenen Abszisse, sofern der Flügel schwingen und endliche Amplituden erreichen soll. Hieraus folgen zwei Integralgleichungen mit der Schwingungsfrequenz und der kritischen Geschwindigkeit als Eigenwerten. Die Kernfunktionen sind die Durchbiegung und die Verdrehung des Flügels.

---

[1]) Birnbaum, Diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 277.

[2]) Blenk und Liebers, Luftfahrtforschung Bd. 1 (1928), Heft 1. — Küssner, Luftfahrtforschung Bd. 4 (1928), Heft 2. — Küssner, Zeitschr. f. techn. Physik 1929, Heft 9.

Diese Gleichungen sind näherungsweise entweder rein rechnerisch oder durch Zuhilfenahme von Belastungsversuchen am fertigen Flugzeug lösbar. Handelt es sich darum, die Höhe der kritischen Geschwindigkeit nachträglich zu bestimmen, so führt besonders dieses letzterwähnte halbexperimentelle Verfahren rasch zum Ziel. Die praktischen Mittel zur Verhütung angefachter Flügelschwingungen sind: ausreichende Verdrehsteifigkeit des Flügels und Massenausgleich des Querruders. 23, 9

10. Über die angenäherte Berechnung der Strömung um einen Propeller in Fahrt mit unendlicher Flügelzahl.

Von **KURT FRIEDRICHS** in Aachen.

Bei manchen hydrodynamischen Fragen hat man sich damit begnügt, die zugehörigen Differentialgleichungsprobleme angenähert zu lösen. So bei der Prandtlschen Tragflügeltheorie, bei der Betzschen Theorie des Propellers mit endlicher Flügelzahl; auch die von Birnbaum angegebene Methode zur Berechnung der Zirkulation um flache Profile gehört hierher. Es handelt sich hierbei immer um Strömungen, die nur wenig von einer »ungestörten« abweichen. Systematisch kann man die Näherungsrechnung begründen, indem man die gesuchte Strömung in der Umgebung der »Ungestörten« entwickelt denkt und nur die ersten Glieder berücksichtigt. Auf Anregung von Prof. v. Kármán wurde in dieser Weise die Theorie der Schraube in Fahrt mit unendlicher Flügelzahl behandelt. In erster Näherung ergeben sich so dieselben Ausdrücke für Schub und Leistung, welche man bisher angab ohne, wie es scheint, den genauen Verlauf der zugehörigen Strömung in erster Näherung zu beschreiben. Ferner wird Schub und Leistung unter Berücksichtigung »sämtlicher Glieder zweiter Ordnung« berechnet.

Der Propeller sei als eine Kreisfläche angesehen, welche der hindurchtretenden Luft, die ursprünglich rotationsfrei war, eine plötzliche Druckerhöhung und einen Drall erteilt. (Von der Reibung sei vollständig abgesehen.) An der Grenze des so entstehenden »Strahles« muß der Druck zu beiden Seiten gleich sein. Wegen der unendlichen Flügelzahl ist die Strömung radialsymmetrisch. Sie ist ferner stationär, von einem System aus betrachtet, welches sich mit dem Propeller in Fahrtrichtung bewegt.

Die Strömung ist als bestimmt anzusehen, wenn auf der Kreisscheibe der Sprung der Bernoullikonstanten (oder die Zirkulation um die Propellerelemente) vorgegeben ist; und überdies die Anblasegeschwindigkeit u, die Propellerwinkelgeschwindigkeit ω, der Kreisradius R, die Massendichte μ der Luft.

Es sei nun der Sprung q der Bernoullikonstanten auf dem Schraubenkreis nach dem »Belastungsgrad« σ entwickelt.

$$q = \mu u^2 [\sigma s(r) + \sigma^2 s_1(r) + \ldots \qquad \{ \sigma \cdot 1/2\, \mu u^2 \cdot R^2 \pi = \text{Schub} \}.$$

{ Der Radius r ist der Abstand eines Punktes von der Achse senkrecht durch den Scheibenmittelpunkt}. Entsprechend sei die Strömung in eine Grundströmung und Zusatzströmungen erster, zweiter, usw. Ordnung entwickelt. Die Entwicklungskoeffizienten der Eulerschen Strömungsgleichungen bestimmen die Wirbelverteilung der Zusatzströmungen aus der Kenntnis der vorangehenden Näherungsströmungen. Die Bedingungen der Kontinuität und der Druckstetigkeit auf der unbekannten »Grenzfläche« des »Strahls« gehen über in Sprungbedingungen auf dem Mantel des »Halbzylinders« hinter dem Schraubenkreis.

Die Grundströmung ist natürlich die axiale Parallelströmung mit der Geschwindigkeit u. Die Zusatzströmung erster Näherung läßt sich auf zwei Weisen darstellen.

1. Sie ist außerhalb des Halbzylinders Potentialströmung. Innerhalb und auf seinem Mantel besitzt sie ein System von »Wirbelschraubenlinien«, deren Stärke und Richtung nur vom Radius r abhängt.

2. Sie läßt sich zusammensetzen aus einer reinen Schraubenströmung im Halbzylinder und einer Potentialströmung im ganzen Raum, die auf dem Schraubenkreis eine Senkenverteilung besitzt, um dort die Kontinuität wiederherzustellen.

Aus dieser Darstellung ergibt sich, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen hinter dem Strahl doppelt so groß ist wie auf dem Schraubenkreis in Punkten mit demselben Radius r. Hieraus läßt sich sofort der Radius des kontrahierten Strahles im Unendlichen in erster Näherung bestimmen.

Zur Berechnung von Schub und Leistung in zweiter Näherung braucht man nur die Geschwindigkeit im Unendlichen in erster und zweiter Näherung und die »Strahlkontraktion« in erster Näherung zu kennen.

Insbesondere läßt sich die günstigste Verteilung der Zirkulation $\Gamma(r)$ (um einen Kreis mit dem Radius r) berechnen. Wird

$$\Gamma(r) = 2\,\pi\,\omega\,\mu\,u^2 [\sigma\,s(r) + \sigma^2\,s_1(r)$$

entwickelt, so ist

$$s(r) = \frac{1}{2(1-\alpha)} \frac{r^2\omega^2}{r^2\omega^2 + u^2},$$

$$s_1(r) = \frac{1}{4(1-\alpha)} \left[2\beta \frac{r^2\omega^2}{r^2\omega^2+u^2} - \frac{r^2\omega^2 u^2}{(r^2\omega^2+u^2)^2} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{u^2}{r^2\omega^2} \ln\left(1 + \frac{u^2}{r^2\omega^2}\right) \right\} \right]$$

und der reziproke günstigste Wirkungsgrad lautet

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{\sigma}{4(1-\alpha)} + \frac{\sigma^2}{4(1-\alpha)^2}\left(\beta - \frac{1}{4}\right).$$

Dabei ist

$$\alpha = \lambda^2 \ln(1 + 1/\lambda^2), \quad \beta = \frac{1}{1-\alpha}\left(\alpha - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{u}{R\,\omega}$$

der Spitzenfortschrittsgrad.

α und β verschwinden für $\lambda = 0$ und bleiben $\leqq 1$. Etwa bei $\lambda = 0{,}4$ wird $\beta = 1/4$. Bei $\lambda = 0{,}5$ bzw. $0{,}25$ und $\sigma = 2$ erniedrigt sich bzw. erhöht sich der Wirkungsgrad um 5—6 vH, wenn man das Glied mit σ^2 noch berücksichtigt.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob nicht an Stelle von σ andere Entwicklungsparameter geeigneter sind. Die Berechnung der Durchflußgeschwindigkeiten zweiter Näherung auf dem Schraubenkreis, die für die Kenntnis der Anblaserichtungen in zweiter Näherung notwendig ist, soll noch durchgeführt werden. 23, 10

11. Eine annähernde Berechnung der Strömung um Flugzeugrümpfe im Hinblick auf die Propellerebene.

Von **TH. TROLLER** in Aachen.

Zum aerodynamischen Entwurf wie zur Festigkeitsberechnung eines Propellers muß man die Anblasegeschwindigkeiten des Propellerflügels ermitteln, für deren Berechnung eine Voraussetzung ist, daß der ohne Wirksamkeit des Propellers an seinem Orte vorhandene Strömungszustand bekannt ist. Für Flugzeuge mit einem Zugpropeller an der Spitze des Rumpfes sind die Geschwindigkeiten in der Propellerebene vor allem durch die Form des Rumpfvorderteiles bestimmt. Um diese zu ermitteln, kann man für einen axialsymmetrischen Rumpf eine Quellensenkenverteilung längs der Rumpfachse benützen, gemäß dem Verfahren, das v. Kármán zur Berechnung der Druckverteilung auf Luftschiffkörper anwendet. Auch die Strömung um nicht rotationssymmetrische Rümpfe, deren Querschnitt sich nach Größe und Form ändert, wie sie in der Flugtechnik am häufigsten vorkommen, läßt sich rechnerisch häufig angenähert feststellen, indem man den Rumpf durch Systeme von Quellen- und Doppelquellenanordnungen[1]) ersetzt. Zu deren Bestimmung hat man als Randbedingung zur Verfügung, daß die Geschwindigkeiten an der Oberfläche des Rumpfes in tangentialer Richtung verlaufen müssen. Wenn man diese Bedingung in n Punkten erfüllen will, erhält man n Gleichungen für n Variationsmöglichkeiten der Quellenanordnung. Die besondere Schwierigkeit, die sich bei nicht axial-symmetrischem Rumpf ergibt, besteht darin, daß man im allgemeinen, um einen genügenden Grad der Annäherung zu erreichen, n so groß nehmen muß, daß die Auflösung des entstehenden Gleichungssystems zu viel Arbeit bereitet. Man kann diese Schwierigkeit in einem technisch brauchbaren Verfahren vermeiden, wie im folgenden gezeigt wird, indem man die Quellen und Doppelquellen längs der Achse anordnet und dann die n Gleichungen in Gruppen teilt, die sich jede für sich einfach auflösen lassen. Diese Trennung wird ermöglicht durch Ausnützung der besonderen Eigenschaften von symmetrischen Doppelquellenanordnungen. Wenn man nämlich Doppelquellen in einem Punkte so anordnet, daß ihre Quell-

[1]) Der einfachen Ausdrucksweise halber wird hier das Wort »Doppelquellenanordnungen« nicht nur im engeren Sinne gebraucht, sondern auch für mehrere Quellen und Senken mit unendlich kleinem Abstand voneinander, bei denen das Produkt aus Quellenstärke und einer Potenz des Quell-Senkenabstandes endlich bleibt.

und Sinkstellen ein symmetrisches Gebilde darstellen in bezug auf jeden Kreisdurchmesser, auf dem einer dieser Quell- oder Senkpunkte liegt, dann ergibt dieses Gebilde einen Strömungszustand ohne Geschwindigkeitskomponenten in den Ebenen senkrecht zur Kreisebene, welche den Winkel zwischen zwei Symmetrieebenen halbieren. Wenn man also für eine solche Ebene zunächst durch geeignete Quellenanordnungen die Randbedingungen erfüllt hat, die durch die Schnittlinie dieser Ebene mit dem (zunächst als rotationssymmetrisch bezüglich dieser Schnittlinie aufgefaßten) Flugzeugrumpf gegeben werden, kann man durch die Wahl von Doppelquellgruppen, die neu hinzukommen, noch Randbedingungen in anderen Ebenen befriedigen, ohne daß dadurch die in der ersten Ebene liegenden Geschwindigkeitskomponenten geändert werden. Durch diese Form der Annäherung ist das Gleichungssystem schon in zwei Gruppen geteilt: die erste enthält die Randbedingungen für die n_1 Punkte der ersten Ebene, die zweite ergibt n_2 neue Unbekannte aus einer neuen Schnittlinie. Oft kann diese Unterteilung weiter fortgeführt werden, indem man für die zweite Gruppe wieder eine Ebene wählt, in der die Doppelquellgebilde einer dritten Gruppe keine Geschwindigkeitskomponenten erzeugen. Einen praktischen Sinn hat das Verfahren natürlich nur dann, wenn man Quell- und Doppelquellgebilde wählt, die auch außerhalb der gerade betrachteten Ebene von sich aus eine gewisse Annäherung an die Rumpfform bringen. Weiter kann man vielfach eine sukzessive Approximation anwenden, indem man zunächst in erster Näherung ein oder zwei Schnittebenen befriedigt und dann eine dritte Ebene durch ein Doppelquellensystem bestimmt, das die beiden früheren Schnitte nur wenig beeinflußt. Dann kann man zurückgehend sukzessive eine zweite oder, wenn nötig, höhere Approximation erreichen, ohne zu jedem Rechnungsgang mehr Arbeit aufwenden zu müssen als zu der Auflösung von Systemen von 3 oder 4 Gleichungen nötig ist. — Mitunter wird es nötig sein, nachträglich nachzuprüfen, ob bei der besonderen Art der sich nach der Annahme der Verteilungsstrecken ergebenden Quell- und Doppelquellgrößen auch außerhalb der betrachteten Punkte die Strömung sinngemäß verläuft. Es ist für die Rechnung und für die Güte der Annäherung praktisch, die Quell- und Doppelquellgebilde längs einer Rumpfachse parallel zur Anströmungsrichtung anzuordnen, als kontinuierliche, streckenweise gleich stark bleibende Belegung. Die Kreisebene der Doppelquellgebilde liegt dabei senkrecht zur Anströmungsrichtung.

Durchgeführte Beispiele zeigen die Brauchbarkeit des Verfahrens und seine Ergebnisse. 23, 11

12. Kinematographische Analyse einer turbulenten Strömung.

Von **J. NIKURADSE** in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Im Göttinger Institut für Strömungsforschung wurden einige Versuche vorgenommen, die turbulente Strömung in einem Gerinne durch kinematographische Aufnahmen in ihrem feineren Aufbau zu erfassen. Durch Analyse der Aufnahmen konnten dann einige für die turbulente Strömung charakteristische Größen abgeleitet werden.

Durch einen rechteckigen schmalen Kanal von der Breite $2b = 6$ cm wurde das Wasser mit konstanter Durchflußmenge ($R = \frac{\bar{u} \cdot 2b}{\nu} = 9800$) durch eine Zentrifugalpumpe getrieben. Die annähernd zweidimensionale turbulente Strömung wurde in bekannter Weise durch Bestreuen der freien Oberfläche mit Aluminiumpulver sichtbar gemacht. Diese Strömung wurde durch einen Kinoapparat aufgenommen, der auf einem Wagen sich längs der Kanalachse über der Flüssigkeitsoberfläche bewegte. Diesem Wagen wurden verschiedene Geschwindigkeiten erteilt, so daß man eine Serie von Bildern derselben turbulenten Strömung, aber mit verschiedener Relativgeschwindigkeit des Beobachters bekam. Der Anlaufseinfluß war in dem Beobachtungsgebiet bereits abgeklungen. Um Stromlinienbilder zu bekommen, war die Belichtungszeit auf $^1/_6$ Sekunde verlängert.

Eine Reihe von Aufnahmen mit derselben Relativgeschwindigkeit des Beobachters wurde nun in der Weise ausgewertet, daß diejenigen Wasserteilchen aufgesucht wurden, die dieselbe Geschwindigkeit wie der Kinoapparat haben. Diese Teilchen haben also die Relativgeschwindigkeit Null in Richtung der Kanalachse und liefern auf den Aufnahmen entweder Punkte oder Striche senkrecht zur Kanalachse. Diese »Nullinien« scheiden die

Strömung in Gebiete mit größerer bzw. kleinerer Geschwindigkeit als die bekannte Wagengeschwindigkeit. Durch die Filmaufnahme bei verschiedenen Wagengeschwindigkeiten läßt sich nun aus den Nullinien eine Verteilung der Längsgeschwindigkeit im ganzen Bereich gewinnen.

Für einen bestimmten Wandabstand konnte man nämlich aus den verschiedenen Nullinien feststellen, wieviel Prozent der auf der ganzen photographierten Strecke liegenden Flüssigkeitsteilchen über der betreffenden Beobachtergeschwindigkeit lagen. Aus diesen »Prozentkurven« kann man einige wichtige Schlüsse ziehen. Zunächst liefert offenbar einen guten Wert für die mittlere Geschwindigkeitsverteilung die 50 %-Kurve, denn 50 % der Flüssigkeitsteilchen in dem betrachteten Wandabstand haben eine größere Geschwindigkeit, ebenso wie 50 % eine kleinere als die so definierte mittlere Geschwindigkeit haben. Diese durch räumliche Mittelung längs der Beobachtungsstrecke entstandene Geschwindigkeitsverteilung ist übrigens in bester Uebereinstimmung mit der durch ein Pitotrohr knapp unter der Oberfläche gemessenen Geschwindigkeitsverteilung.

Ganz ähnlich kann man aus den Prozentkurven auch ein mittleres Schwankungsintervall für die Schwankung u' bekommen. Dies gelingt schon mit genügender Annäherung durch Betrachtung der Differenz der 75 %igen und 25 %igen Kurve gegenüber der eben benutzten mittleren, d. h. der 50 %igen Kurve. Außerhalb des Intervalles zwischen der 75 %igen und der 25 %igen Kurve liegen nämlich gerade 50 % der Längsgeschwindigkeiten: über der 25 %igen Kurve definitionsgemäß 25 %, unter der 75 %igen Kurve auch 25 %. In dem Intervall zwischen den beiden Kurven liegen dann auch gerade 50 % der Längsgeschwindigkeiten. Die so erhaltenen räumlichen Mittelwerte des Absolutwertes der Längsschwankung zeigt die Abb. 1 und zwar in Prozenten der maximalen Geschwindigkeit. Dieser Mittelwert steigt in der Nähe der Wand sehr rasch an und bleibt dann fast konstant.

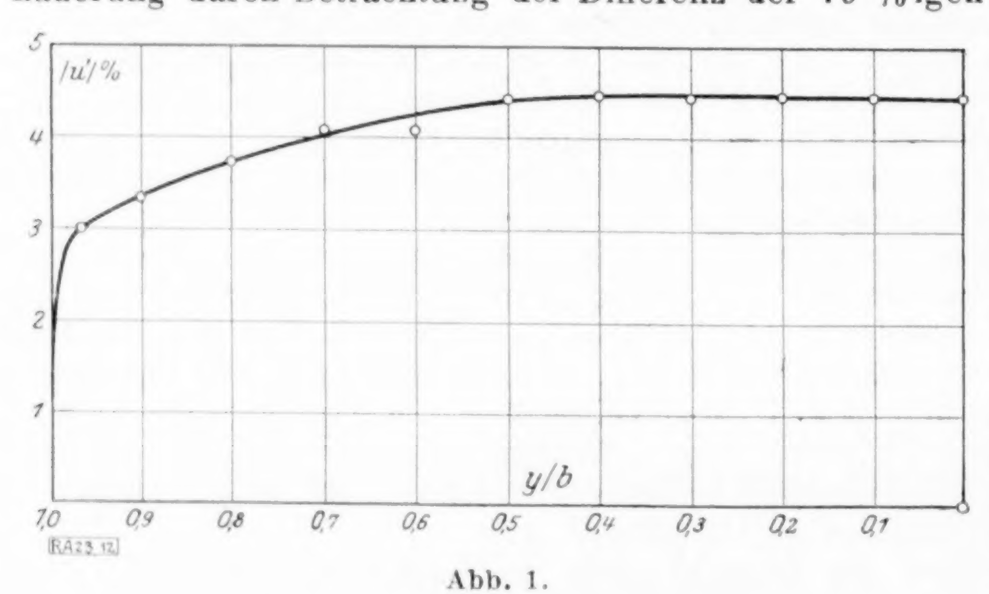


Abb. 1.

Die Aufgabe, den mittleren Absolutwert der Querschwankung aus den Aufnahmen zu bestimmen, ist bisher noch nicht erledigt. Dagegen kann man leicht den Mittelwert $-\varrho\,\overline{u'v'}$ ermitteln, indem man von der aus dem Druckgefälle errechneten Schubspannung den laminaren Anteil $\mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ abzieht.

Weitere Auswertungen der Aufnahmen sind geplant. 23, 12

13. Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit.

Von A. BUSEMANN in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Die schon längere Zeit bekannte zweidimensionale Strömung um einen Keil bei Ueberschallgeschwindigkeit [1]) läßt sich auf den rotationssymmetrischen Fall der Strömung um eine Kegelspitze erweitern. Bei reibungslosem Gas kann man jede Strömung geometrisch ähnlich vergrößern, wobei die Geschwindigkeitsvektoren und die Drücke an entsprechenden Punkten erhalten bleiben. Solange es überhaupt eine Lösung für den beliebig langen Keil oder den beliebig langen Kegel gibt, was nur bei Ueberschallgeschwindigkeit der Fall ist, muß sich daher die Strömung in sich selbst vergrößern oder verkleinern lassen. Als Fläche konstanten Druckes ergeben sich dabei für den Keil die Halbebenen durch die Keilschneide und beim Kegel alle koaxialen Kegel mit derselben Spitze. Beim Keil

[1]) Th. Meyer: Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausgegeben vom VDI, Heft 62, Berlin 1908.

treten diese Flächen konstanten Druckes nicht unmittelbar in Erscheinung, weil die ganze Druckänderung in einer einzigen Ebene, der Ebene des »Verdichtungsstoßes« zusammengefaßt ist (Abb. 1). Die Geschwindigkeitsänderung findet ebenfalls in dieser Ebene statt. Ihre Richtung ist senkrecht zu dieser Ebene in der Richtung des Druckanstieges.

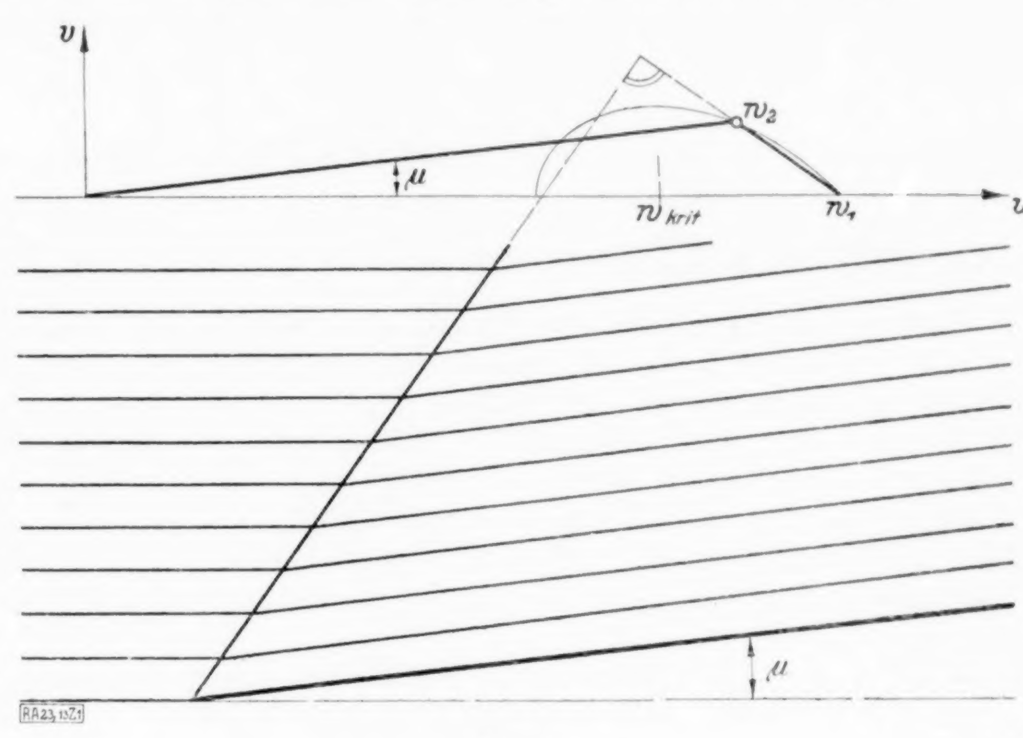


Abb. 1.

Bei derselben Anblasegeschwindigkeit (in den Abbildungen ist Luft mit w_1 gleich der $\sqrt{2}$-fachen Schallgeschwindigkeit angenommen) kann ein Verdichtungstoß derselben Stärke in einer Kegelfläche an der Spitze eines Kegels auftreten, dessen Oeffnungswinkel 2ν noch unbekannt sein möge. Die Stromlinien hinter dem Verdichtungsstoß bilden zunächst denselben Winkel μ mit der Achse wie beim Keil, sie müssen sich aber mit der Zeit zusammendrängen, damit der Querschnitt jeder Stromröhre auch bei wachsender Entfernung von der Kegelachse endlich bleibt. Durch die Krümmung der Stromlinien entsteht ein weiterer Druckanstieg, der adiabatisch erfolgt und dessen Flächen konstanten Druckes Kegelflächen sind. Zeichnet man zu dem Strömungsplan auch in diesem Falle das Geschwindigkeitsbild, so muß die Geschwindigkeitsänderung dw jeweils senkrecht zu der entsprechenden Kegelfläche konstanten Druckes mit dem halben Oeffnungswinkel φ liegen. Aus der Bedingung, daß zwischen einer Stromlinie und dem Kegel stets dieselbe Luftmasse fließen muß, ergibt sich durch einfache Rechnung (wenn man als Kontrollflächen die Kegelflächen konstanten Geschwindigkeitsvektors benutzt) eine Beziehung, die

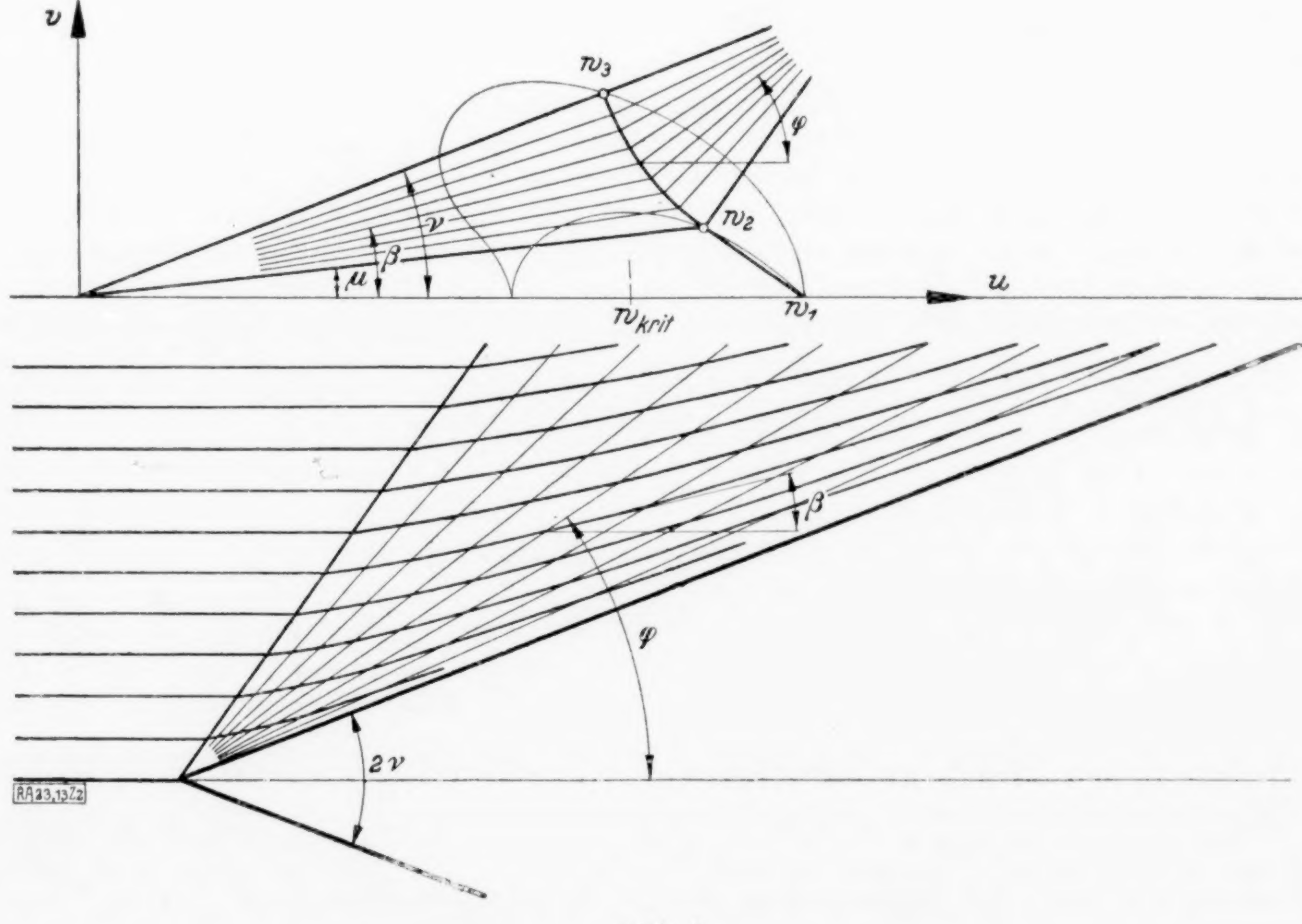


Abb. 2.

den Fortschritt $-d\varphi$ mit der Geschwindigkeitsänderung dw verknüpft. Das Verhältnis $\frac{dw}{d\varphi}$ ergibt aber den jeweiligen Krümmungsradius R des Abbildes der Stromlinie im Geschwindigkeitsbild. Aus diesem Krümmungsradius

$$R = \frac{w \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}}{1 - \frac{\sin^2(\varphi-\beta)}{\frac{\varkappa+1}{2}\frac{w_{krit}^2}{w^2} - \frac{\varkappa-1}{2}}},$$

wobei w_{krit} die kritische Geschwindigkeit und $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ für Luft der Wert 1,4 ist, läßt sich im Geschwindigkeitsplan die Stromlinie zeichnerisch ermitteln und so lange fortsetzen, bis der Winkel β zwischen Geschwindigkeitsrichtung und Kegelachse gleich dem zugehörigen φ geworden ist. In diesem Punkt ist β gleich dem gesuchten ν. Aus dem zugehörigen Geschwindigkeitsbetrag w_3 findet man den Druck, der auf der ganzen Kegelfläche konstant ist. Ist diese Endgeschwindigkeit w_3 selbst größer als die Schallgeschwindigkeit, so kann man den Kegel an beliebiger Stelle abschneiden, ohne daß die Drücke auf dem Kegel geändert werden. In Abb. 1 und 2 sind im Geschwindigkeitsbild die Kurven für beliebiges μ und die Grenzkurve für beliebiges ν angegeben. 23, 13

14. Die Wärmeleitung im endlich langen Kreiszylinder unter besonderen Randbedingungen.

Von **J. LOTZ** in Hannover.

Ein technisches Problem gab die Veranlassung, die Wärmeleitung im endlich langen Kreiszylinder unter gewissen Bedingungen zu untersuchen. Man wünschte die Temperaturverteilung im Stempel einer Kaltpresse zu kennen, insbesondere die Temperaturen der Punkte nahe der Stirnfläche, da von deren Schwanken die Lebensdauer des Werkzeuges abhängt. In letzter Zeit unternommene Versuche[1]) haben gezeigt, daß die in der Praxis gehegten Bedenken gegen die Schnelläufigkeit der Kaltpressen, durch die, wie man fürchtete, eine zu große Abnutzung der Arbeitsflächen infolge schnellen Ansteigens der mittleren Temperaturen eintrete, hinfällig sind.

Man muß zur Untersuchung der Verhältnisse folgendes mathematische Problem lösen:

Gesucht ist die Temperaturverteilung in einem kreiszylindrischen Stabe von endlicher Länge, wenn die eine Endfläche (Deckfläche) auf konstanter Temperatur gehalten wird und auf der anderen Endfläche (Stirnfläche) die Temperatur als Funktion der Zeit und des Abstandes r von der Achse gegeben ist. Längs des Mantels ist der Wärmeverlust proportional dem Temperaturunterschiede der Oberfläche gegenüber der Umgebung. Zu Anfang ist die Temperaturverteilung im Stabe konstant (bei passender Wahl des Nullpunktes der Temperaturskala: Null)[2]).

Der Durchmesser des Stempels sei $2r_0$, die Länge l. Bezeichnen wir die Temperatur mit V, so muß V, da das Problem achsensymmetrisch ist, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right\}$$

(a = Temperaturleitfähigkeit)

genügen, der Anfangsbedingung

$$t \to 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad V \to 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

den Randbedingungen $t > 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad z \to 0, \quad V \to f(r, t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad$ (II),

[1]) Geller, Der Einfluß der Geschwindigkeit bei der plastischen Verformung in Kaltpressen, Dissertation, Hannover 1927.

[2]) Eine nähere Erörterung darüber, wie man zu dieser Festlegung der Randbedingungen gekommen ist, welche Einwände dagegen erhoben werden können usw., ist des geringen Platzes wegen nicht möglich. Vgl. dazu die demnächst erscheinende Dissertation: Die Erwärmung des Stempels beim Stauchvorgang.

wo $f(r, t)$ eine endliche und zunächst stetige Funktion von t und r in dem betrachteten Bereiche sein soll. Für den Stempel wird diese Funktion von der Form $\varphi(t) \cdot R(r)$ angenommen.

$$t > 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad z > l, \quad V \rightarrow \text{konst.} \qquad \text{(III).}$$

Und zwar soll V für $z = l$ gleich der Temperatur V_u der Umgebung sein. V_u soll als konstant angesehen werden und mit Null bezeichnet werden.

$$t > 0, \quad 0 < z < l, \quad r \rightarrow r_0, \quad \lambda \frac{\partial V}{\partial r} + \alpha V \rightarrow 0 \qquad \text{(IV),}$$

(λ Wärmeleitfähigkeit, α Wärmeübergangszahl an Luft).

Man kann die Lösung dieses Problems zweifach gewinnen, je nachdem man an die Fouriersche oder an die Thomsonsche Lösung für den linearen Stab anknüpft.

Ich gebe die beiden Lösungsformen an:

I. Thomsonsche Form:

$$V(z, r, t) = \sum_{0}^{\infty} {}_n A_n J_0(\gamma_n r) \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_\rho \int_0^t \frac{a(z + 2\rho l)\, e^{-\frac{(z+2\rho l)^2}{4a(t-\tau)}}}{2\pi^{1/2}\sqrt{a(t-\tau)}^{\,3}}\, e^{-a\gamma_n^2(t-\tau)}\, \varphi(\tau)\, d\tau,$$

wo J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung bezeichnet, die γ_n die Wurzeln der Gleichung

$$\gamma J_0'(\gamma r_0) + \alpha/\lambda \cdot J_0(\gamma r_0) = 0$$

sind und die A_n die »Fourierkoeffizienten« der Entwicklung der Funktion $R(r)$ nach den Funktionen $J_0(\gamma_n r)$:

$$R(r) = \sum_{0}^{\infty} {}_n A_n J_0(\gamma_n r).$$

II. Fouriersche Form:

$$V(z, r, t) = \varphi(t) \sum_{0}^{\infty} {}_n A_n J_0(\gamma_n r) \left\{ e^{-\gamma_n z} - e^{-\gamma_n l} \frac{\mathfrak{Sin}\, \gamma_n z}{\mathfrak{Sin}\, \gamma_n l} \right\}$$

$$- \frac{2}{l} \sum_{1}^{\infty} {}_m \sin\left(\frac{m\pi}{l} z\right) \sum_{0}^{\infty} {}_n A_n J_0(\gamma_n r) \frac{\frac{m\pi}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \gamma_n^2} \left\{ \varphi(0)\, e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \gamma_n^2\right] a t} \right.$$

$$\left. + \int_0^t \varphi'(\tau)\, e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \gamma_n^2\right] a(t-\tau)}\, d\tau \right\}.$$

Man kann zeigen, daß die Fouriersche Form die sin-Entwicklung der Thomsonschen nach z ist. Die Thomsonsche Form konvergiert gut für kleine z und beliebige r und t, die Fouriersche für Werte z nahe l und beliebige r und t. Im Falle, daß die Stirnflächentemperatur periodisch, also $\varphi(t)$ periodisch ist, wird die Temperaturverteilung im Stabe einem Beharrungszustande zustreben, der die gleiche Periode hat. Man kann mit Hilfe der Fourierschen Form leicht abschätzen, wie groß die Abweichung zur Zeit T von diesem Beharrungszustande ist. Bei der Rechnung nach der Thomsonschen Form, die, da nur die Temperaturen für kleine z interessieren, benutzt wird, läßt sich der Einfluß einer Aenderung von Material und Dimensionen des Stempels leicht abschätzen. Das ist für die Praxis wesentlich. Den Einfluß einer Kürzung der Periodenlänge, also einer Steigerung der Tourenzahl der Presse, kann man bei den üblichen Materialien und Dimensionen verhältnismäßig leicht überblicken: Wenn die Periodenlänge von ϑ auf $\chi \cdot \vartheta$ ($\chi < 1$) abnimmt und die Funktionswerte φ die gleichen bleiben, nehmen die Ordinaten der Temperaturwelle im Beharrungszustande und damit die mittlere Temperatur den höchstens $\frac{1}{\sqrt{\chi}}$ mal größeren Wert an. Die Annahme der gleichbleibenden Funktionswerte ist bei geringen Stauchungsgraden nach Geller gestattet. Im übrigen könnte man eine proportionale Vergrößerung der $\varphi(t)$, daß also statt $\varphi(t)$ die Werte $\varkappa \cdot \varphi(t)$ eingehen, leicht aufnehmen und würde damit auch in komplizierteren Fällen eine obere Schranke für die mittlere Temperatur erhalten. 23, 14

15. Schwingungsprobleme und nichtlineare Integralgleichungen.

Von **R. IGLISCH** in Berlin.

Die ungeraden mit der Halbperiode π periodischen Schwingungen eines einer sinusförmigen erzwingenden Kraft unterworfenen mathematischen Pendels der Masse 1 und der Länge g/α^2 (g = Schwerebeschleunigung) werden im Intervall $< o, \pi >$ für die Zeit t dargestellt durch die Lösungen von

$$1. \quad \ddot{x} + \alpha^2 \sin x = -\beta \sin t \text{ (erste Randwertaufgabe).}$$

Schon Herr Hamel hat in den Math. Ann. 86 gezeigt, daß 1. für beliebige α^2 und β mindestens eine Lösung besitzt, für $\alpha^2 < 1$ genau eine. Herr Hammerstein (Eine nichtlineare Randwertaufgabe; die Arbeit erscheint demnächst im Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung) konnte auf elementarem Wege zeigen: Bei festem β gibt es eine Konstante $\alpha_0(\beta)$, so daß für $\alpha \geqq \alpha_0$ 1. mehr als z. B. $\alpha/3$ Lösungen besitzt[1]). Die Lösungsanzahl wächst also mit wachsendem α über alle Grenzen. Die großen Werte von β kann ich durch folgendes Resultat erledigen: Vorgegeben sei eine Zahl $\alpha_0 > 1$. Dann gibt es eine endliche Zahl $\beta_0(\alpha_0)$, so daß 1. für alle $\alpha \leqq \alpha_0$ und $\beta \geqq \beta_0$ genau eine Lösung besitzt.

Für $\beta = 0$ sind sämtliche Lösungen von 1. bekannt. Die freien Schwingungen lassen sich ja leicht als elliptische Funktionen darstellen. Ausgehend von $\beta = 0$ gelange ich unter Heranziehung der von Herrn E. Schmidt entwickelten Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen (Math. Ann. 65) und eines Verfahrens der analytischen Fortsetzung zu folgendem Resultat: In der α^2, β-Ebene (siehe Abb.), von der ich nur positive β zu betrachten brauche, da für negative β x das Vorzeichen umdreht, gibt es ein System von analytischen Kurven, die in den Punkten $\alpha^2 = 1, 4, 9 \ldots$ mit horizontaler Tangente beginnen — sie verhalten sich übrigens in der Umgebung von $\alpha^2 = \nu^2$, $\beta = 0$ wie $\beta^2 = P \cdot (\alpha^2 - \nu^2)^3$ mit positivem P — von folgender Beschaffenheit: Zu den Wertepaaren (α^2, β) über diesen Kurven gibt es neben Einzellösungen mehrfache Lösungen. Mit Ausnahme höchstens von abzählbar vielen Punkten, die sich im Endlichen nicht häufen können und die die einzigen singulären Punkte bilden können, ändert sich die Lösungsanzahl von 1. an den Kurven um 2. Diese abzählbar vielen Ausnahmepunkte bilden noch eine gewisse Lücke in der Theorie, die durch spätere Untersuchungen noch beseitigt werden muß. Es ist nämlich denkbar, daß an diesen Stellen unsere Kurven von anderen analytischen Kurven gekreuzt werden, über denen auch mehrfache Lösungen liegen. Mehrfache Lösungen und demnach Aenderungen in der Gesamtzahl der Lösungen von 1. können jedoch nur längs eines solchen Systems von analytischen Kurven stattfinden. Es wäre also von höchstem Interesse, dieses Kurvensystem anzugeben.

Besonders interessiert man sich für die 1-Kurve. Durch Erweiterung von Ueberlegungen im Kleinen an der zum Punkt $\alpha^2 = 1$, $\beta = 0$ gehörenden Schmidtschen Verzweigungsgleichung gelangt man zu folgendem Resultat, das bisher nur bis etwas über $\alpha^2 = 2$ hinaus sichergestellt ist, wahrscheinlich aber noch weiter gilt. Die 1-Kurve weist bis dahin keinen Ausnahmepunkt auf. Hält man α^2 zwischen 1 und 2 fest und läßt β von 0 an wachsen, so läßt sich die bei $\beta = 0$ bestehende positive freie Schwingung für wachsende β stetig fortsetzen bis zu beliebig großen β. Die identisch verschwindende und die negative Freischwingung jedoch nur bis zu unserer 1-Kurve, wo sie zu der dortigen Doppellösung zusammentreten und über das durch die Kurve gelieferte β hinaus nicht mehr existieren. An der 1-Kurve verschwinden also plötzlich zwei Lösungsmöglichkeiten. Weitere Lösungen von 1. gibt es nicht für $\alpha^2 \leqq 2$. Links der 1-Kurve gibt es mithin eine Lösung, rechts darunter drei.

Diese Resultate werden auf den elektrischen Schwingungskreis angewandt, wo sie einige von Hrn. Martienssen (Physik. Zeitschr. 11) erhaltenen Versuchsergebnisse theoretisch bestätigen. Analoge Ueberlegungen werden an einem dem Zentrifugalregulator ähnlichen System durchgeführt, das auf den Gleichungstyp

$$2. \quad \ddot{x} + \alpha^2 \sin x - \beta^2 g^2(t) \sin 2x = 0$$

führt. Hier kann man wieder, wie oben, ein Kurvensystem angeben. Doch tritt in diesem Falle kein sprunghaftes Aufhören periodischer Lösungsmöglichkeiten z. B. an der 1-Kurve ein, da bei dem früher geschilderten Prozeß der Vergrößerung von β an der 1-Kurve alle drei Lösungen zu $x \equiv 0$ zusammentreten, welches oberhalb der 1-Kurve die einzig existierende ist. 23, 15

[1]) Diese Aussage konnte von mir neuerdings wesentlich verschärft werden.

16. Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von **W. STERNBERG** in Breslau.

Der erste Versuch einer mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitslehre rührt von Laplace her. Er definiert: Wahrscheinlichkeit $= \dfrac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$, vorausgesetzt, daß alle möglichen Fälle gleich möglich oder gleich wahrscheinlich sind. Additions- und Multiplikationssatz werden als Lehrsätze abgeleitet. Nun ist es zwar logisch denkbar, die Wahrscheinlichkeit auf die Gleichwahrscheinlichkeit zurückzuführen und die letztere zu definieren, bevor ein Maß für die erstere definiert ist. Da die Gleichwahrscheinlichkeit aber nie definiert worden ist, fehlt dem Versuche von Laplace die Grundlage. Ueberdies ist die Definition von Laplace nur auf rationale Wahrscheinlichkeiten anwendbar. Sie versagt bei irrationalen Wahrscheinlichkeiten, z. B. bei der Wahrscheinlichkeit, mit einem empirischen (nicht mathematischen) Würfel eine bestimmte Zahl zu werfen. Daher wurden Versuche gemacht, die Wahrscheinlichkeitstheorie exakter und allgemeiner zu begründen.

Bohlmann hat in der Enz. d. math. Wiss. (Bd. I, Teil II D 4b) ein System von Definitionen und Axiomen als Grundlage aufgestellt. Hier erscheinen Additions- und Multiplikationssatz als Axiome. Die Wahrscheinlichkeit selbst für das Eintreten eines Ereignisses E wird »definiert« als ein E zugeordneter positiver echter Bruch. Sie erscheint also einfach als ein Grundbegriff, der nicht mehr auf andere Begriffe zurückgeführt werden kann, ähnlich wie der Begriff des Punktes in der Geometrie. Broggi hat (Diss. Göttingen 1907) bewiesen, daß das Axiomensystem von Bohlmann die Bedingungen der Widerspruchslosigkeit und (nach einer geringfügigen Modifikation) Unabhängigkeit erfüllt. Borel nimmt in seinem großen Werke über Wahrscheinlichkeitsrechnung (erscheint seit 1925) denselben Standpunkt wie Bohlmann ein, insofern auch bei ihm Additions- und Multiplikationssatz als Axiome auftreten.

In der Math. Zeitschr. Bd. 5 hat nun Herr v. Mises die Wahrscheinlichkeitsrechnung statistisch zu begründen versucht. Er stellt zwei Axiome auf, aus denen sich wieder Additions- und Multiplikationssatz als Folgerungen ergeben. Das erste Axiom, auf das allein wir hier eingehen, besagt in dem Falle, daß nur zwei Ereignisse E und F möglich sind, folgendes: Tritt bei s Versuchen m Mal E ein, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{s=\infty} m/s$ und ist definitionsgemäß gleich der Wahrscheinlichkeit p für E. Ebenso ist natürlich $\lim\limits_{s=\infty} \dfrac{s-m}{s} = q =$ Wahrscheinlichkeit für F. Demnach existiert bestimmt (nicht bloß wahrscheinlich) zu einem beliebig gegebenen positiven ε ein s_0 derart, daß $\left|\dfrac{m}{s} - p\right| \leqq \varepsilon$, wenn nur $s \geqq s_0$. Diese Aussage steht aber in Widerspruch zu dem Theorem von Bernoulli, welches doch in jeder Wahrscheinlichkeitslehre gültig bleiben muß und sich natürlich auch aus den Axiomen von Herrn v. Mises ergibt. Nach dem genannten Theorem nämlich besteht die Wahrscheinlichkeit $\Phi(\gamma)$ — für die Bernoulli den Ausdruck $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\gamma e^{-t^2}dt$ gefunden hat, worauf es aber hier nicht ankommt — dafür, daß $\left|\dfrac{m}{s} - p\right| \leqq \gamma \sqrt{\dfrac{2pq}{s}}$ ist, also die komplementäre Wahrscheinlichkeit $\Psi(\gamma) = 1 - \Phi(\gamma)$ dafür, daß $\left|\dfrac{m}{s} - p\right| > \gamma \sqrt{\dfrac{2pq}{s}}$ ausfällt. Man nehme nun hier für s die als existierend postulierte Zahl s_0 und bestimme γ durch die Gleichung $\gamma \sqrt{\dfrac{2pq}{s_0}} = \varepsilon$. Dann ist mit der Wahrscheinlichkeit $\Psi(\gamma)$ darauf zu rechnen, daß $\left|\dfrac{m}{s_0} - p\right| > \varepsilon$ wird. Hierin liegt der Widerspruch zu dem Axiom von der Existenz des Grenzwertes; denn $\Psi(\gamma)$ mag vielleicht sehr klein sein, kann aber nicht verschwinden, weil γ endlich ist.

Das Axiomensystem von Bohlmann scheint bisher das einzige logisch einwandfreie zu sein. 23, 16

17. Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.[1]

Von **ERHARD TORNIER** in Kiel.

$F = (a_{ik})$ sei eine unendliche Matrix, a_{ik} ein beliebiges Element aus

$$f_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, \ldots, e_i^{(t_i)}), \quad 1 \leqq t_i,$$

f_i die Gesamtheit der im i-ten Versuch möglichen, sich ausschließenden Ergebnisse. F ist sozusagen Idealbild aller durch eine Versuchsanordnung erklärter unendlicher Versuchsreihen (Versuchsreihe = Spalte).

$C = (e_1^{(r_1)} e_2^{(r_2)} \ldots e_k^{(r_k)})$ sei ein beliebiger Spaltenanfang. $A_k[(C)]$ sei die Anzahl der Spalten in F bis zur k-ten inkl., die mit C beginnen. $R_k[(C)]$ ist die entsprechende relative Häufigkeit.

C und C' schließen sich aus, wenn sie ihrer Zusammensetzung nach nicht in derselben Spalte stehen können.

Eine Reihe mit reellen Summanden heißt einwertig, wenn keine Umordnung der Summanden die (eventuell unendliche) Reihensumme ändert.

Ist φ eine Spaltenfolge aus F, so ist $R_k(\varphi)$ die relative Häufigkeit des Auftretens der Spalten aus φ in F bis zur k-ten Spalte von F inkl.

$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots)$, also eine Folge von Spaltenfolgen aus F, heißt Selektiv, wenn 1. $\lim\limits_{k \to \infty} R_k(\varphi_n) = W(\varphi_n)$ für alle n existiert; wenn 2. für jede natürliche Zahl p zu jeder Gesamtheit $G_p^{(\sigma)}$ aller der Spalten, die von der p-ten Zeile inkl. ab übereinstimmen, eine Zahl $N(G_p^{(\sigma)})$ existiert, so daß eine Spalte aus $G_p^{(\sigma)}$ entweder allen φ_n mit $n \geqq N(G_p^{(\sigma)})$ angehört, oder keinem solchen φ_n. (Nicht alle Spalten aus $G_p^{(\sigma)}$ brauchen hierin sich gleich zu verhalten.)

Die Folge φ_∞ der Spalten aus F, die fast allen (bis auf endlich viele) φ_n von Φ angehören, heißt die Grenzfolge von Φ.

F heißt Wahrscheinlichkeitsfeld, wenn folgende sechs Axiome gelten:

I. $\lim\limits_{k \to \infty} R_k[(C)] = w^{(C)}$ existiert für alle C.

II. $\lim\limits_{k \to \infty} \{A_k[(C)] : A_k[(C')]\} = {}^{(r_1 r_2 \ldots r_{k-1})} w^{(r_k)}$, $C = (e_1^{(r_1)} e_2^{(r_2)} \ldots e_k^{(r_k)})$, $C' = (e_1^{(r_1)} e_2^{(r_2)} \ldots e_{k-1}^{(r_{k-1})})$ existiert auch, wenn $\lim\limits_{k \to \infty} R_k[(C')] = 0$.

III. $\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu R_k[(C_\nu)] = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu w^{(C_\nu)}$, wenn die rechte Seite einwertig ist und die C_ν eine Folge sich paarweise ausschließender Elemente bilden.

IV. Für jedes Selektiv existiert: $\lim\limits_{n \to \infty} W(\varphi_n)$[2].

V. Für jede Grenzfolge existiert: $\lim\limits_{k \to \infty} R_k(\varphi_\infty)$.

VI. $\lim\limits_{k \to \infty} R_k(\varphi_\infty) = \lim\limits_{n \to \infty} W(\varphi_n)$, wenn φ_∞ Grenzfolge von $\Phi = \{\varphi_n\}$ ist.

IV bis VI beantworten Fragen, wie z. B. nach der Wahrscheinlichkeit, daß in einer unendlichen alternativen Versuchsreihe (Spalte) das Ereignis genau m — mal eintritt und alle ähnlichen.

Die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten entstehen, wenn in II allgemein vorausgesetzt wird:

$${}^{(r_1 r_2 \ldots r_{k-1})} w^{(r_k)} = {}^{(r_1' r_2' \ldots r'_{k-1})} w^{(r_k)} = w_k^{(r_k)}.$$

Man beweist durch Konstruktion die Widerspruchsfreiheit der Axiome und zeigt, daß alle Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich als Sätze über Grenzwerte in Wahrscheinlichkeitsfeldern beweisen lassen. Die geometrischen Wahrscheinlichkeiten werden als Grenzwerte diskontinuierlicher Wahrscheinlichkeiten erfaßt. 23, 17

---

[1] Sätze und Beweise finden sich in einer demnächst in Crelles Journ. erscheinenden Arbeit gleichen Titels.

[2] Weitere Untersuchungen haben inzwischen gezeigt, daß es zweckmäßiger ist, IV. der Selektivdefinition als Forderung 3 einzufügen und dadurch den Selektivbegriff einzuengen.

18. Über die Anwendung der Steinerschen Fläche in der Erblichkeitslehre, insbesondere in der Theorie der Blutgruppen.

Von **F. BERNSTEIN** in Göttingen.

Nach der Entdeckung Landsteiners zerfallen die Menschen in 4 Blutgruppen $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{AB}$ derart, daß das Blut derselben Gruppe sich ohne Reaktion mischt, während bei Mischung von Blut verschiedener Gruppen gesetzmäßige Reaktionen stattfinden. Die Zugehörigkeit zur Blutgruppe ist erbbedingt, und zwar bestehen nach der Theorie des Vortragenden 3 Erbeinheiten A, B, R, welche von einer Ei- oder Samenzelle jeweils getragen werden derart, daß die befruchtete Eizelle und ebenso das von ihr stammende Individuum eine der sechs Doppelformeln

$$\left.\begin{matrix} AA \\ AR \end{matrix}\right\} \equiv \overline{A}, \qquad \left.\begin{matrix} BB \\ BR \end{matrix}\right\} \equiv \overline{B}, \qquad AB \equiv \overline{AB}, \qquad RR \equiv \overline{O} \quad . \ . \ . \quad (1)$$

trägt. Infolge der Rezessivität der Erbeinheit R gegenüber A und B reduzieren sich die 6 Blutklassen in der in (1) durch die Klammern angegebenen Weise auf die 4 beobachtbaren.

Die Verteilung der Blutgruppen in den verschiedenen menschlichen Populationen ist eine durch Rassenzusammensetzung bedingt verschiedene. Bezeichnet man die Häufigkeit der Gene A, B, R mit p, q, r $(p+q+r=1)$, so sind, aus der geographischen Variation zu schließen, diese Häufigkeiten charakteristisch für die Population. Die vier beobachtbaren Blutgruppen werden, wenn man ihre Frequenz mit den gleichen Buchstaben $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{AB}$ bezeichnet, bei freier Mischung durch die Formeln

$$\overline{O} = r^2, \qquad \overline{A} = p^2 + 2pr, \qquad \overline{B} = q^2 + 2qr, \qquad \overline{AB} = 2pq \quad . \ . \quad (2)$$

dargestellt. Die Elimination der p, q, r (2 Unabhängige) muß eine Beziehung zwischen den 4 beobachteten Blutgruppen (3 Beobachtungsgrößen) liefern, welche ein die Richtigkeit der Theorie kontrollierendes Gesetz darstellen muß.

Deutet man die Blutgruppenfrequenzen $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{AB}$ als homogene Raumkoordinaten, so wird die gesuchte Relation die Gleichung einer Fläche, welche sich als die von Steiner entdeckte Römerfläche erweist. Schreibt man diese in der von Weierstraß aufgestellten Normalform

$$\varrho x_1 = (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^2, \quad \varrho x_2 = (-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2, \quad \varrho x_3 = (-\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)^2, \quad \varrho x_4 = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 \quad (3),$$

so ist zu setzen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\overline{O} + \overline{B}) : (\overline{O} + \overline{A}) : \overline{O} : 1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

und

$$\xi_1 = \frac{p}{2}, \qquad \xi_2 = \frac{q}{2}, \qquad \xi_3 = \frac{p+q}{2} + r \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5).$$

In der von Cayley aufgestellten Form lautet nunmehr die Gleichung der Fläche.

$$\sqrt{\overline{O} + \overline{A}} + \sqrt{\overline{O} + \overline{B}} - \sqrt{\overline{O}} - 1 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6).$$

In dieser Form ist sie an 75 Populationen von mehr als 200 000 Personen numerisch geprüft und bestätigt worden, wobei eine genaue Theorie des mittleren Fehlers entwickelt und benutzt wurde. Die Formeln (5) stellen die Abbildung der Steinerschen Fläche mittels der Weierstraßschen Parameter auf die Projektivebene dar. Die Fläche ist vom Geschlecht 0, und die Abbildung ist umkehrbar eindeutig und singularitätenfrei. Infolgedessen lassen sich die Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3 rational durch die Koordinaten der Fläche darstellen und zwar in der Form

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{1}{2\,\xi_2 \cdot \xi_3} : \frac{1}{2 \cdot \xi_1 \cdot \xi_3} : \frac{1}{2\,\xi_1 \cdot \xi_2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (7),$$

wo die Doppelprodukte offenbar lineare Kombinationen der x_1, x_2, x_3, x_4 sind. Die Durchführung ergibt, wenn man auf die p, q, r und die Blutgruppenzahlen zurückgeht, die Bestimmung

$$p : q : (1 + r) = (2\overline{B} + \overline{AB}) : (2\overline{A} + \overline{AB}) : \overline{AB} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (8).$$

Der Vortragende gab noch weitere Ausführungen über die Bedeutung der von Weierstraß, Cayley, Clebsch ermittelten Tatsachen über die Steinersche Fläche in der Theorie der Blutgruppen und wies auf neue algebraische Probleme hin, die sich daraus ergeben, daß für die mit Zufallsfehlern behafteten Beobachtungen die im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung beste Bestimmung der Weierstraßschen Parameter, die im Mittelpunkt der anthropologischen Forschung stehen, notwendig wird. 23, 18

19. Vektorische Fehlertheorie und geodätische Fehlerübertragung.[1])

Von **A. BASCH** in Wien.

Bei den Ortsbestimmungen der Geodäsie wird der Ortsvektor $\mathfrak{S}$ eines Neupunktes nach Durchführung von Messungen, von deren Ungenauigkeit hier abstrahiert werden soll, als Funktion der Ortsvektoren $\mathfrak{A}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ einer Anzahl von Altpunkten berechnet. Ein einfacher Fall wäre seine Angabe durch die Gleichung

$$\mathfrak{S} = \sum_1^m \alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu \qquad \left(\sum_1^m \alpha_\mu = 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

ein Fall, der bei der Ortsbestimmung durch Rückwärtseinschneiden in der Ebene realisiert ist. Die skalaren Vorzahlen α_μ sind in diesem Falle die baryzentrischen Koordinaten des Neupunktes in bezug auf die drei Altpunkte und nur von den orientierten Winkeln des Altpunktedreieckes und den orientierten Sehwinkeln, unter denen die gerichteten Dreieckseiten vom Neupunkte aus erscheinen, abhängig.

Bedeutet $\mathfrak{a}_\mu$ den Fehler des Vektors $\mathfrak{A}_\mu$, so ist die Genauigkeit des Vektors $\mathfrak{A}_\mu$ bzw. der Lage des Punktes, dessen Ortsvektor $\mathfrak{A}_\mu$ ist, durch den Fehlertensor

$$T_{\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\mu} = E(\mathfrak{a}_\mu \cdot \mathfrak{a}_\mu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

gekennzeichnet, der die mathematische Erwartung der symmetrischen Fehlerdyade $\mathfrak{a}_\mu \cdot \mathfrak{a}_\mu$ bildet[2]). Soll der Fehlertensor des durch Gl. (1) bestimmten Neupunktes, bzw. seines Ortsvektors bestimmt werden, so müssen außer den Fehlertensoren der Altpunkte, bzw. ihrer Ortsvektoren, noch die mathematischen Erwartungen der im allgemeinen unsymmetrischen Fehlerdyade $\mathfrak{a}_\varrho \cdot \mathfrak{a}_\sigma$

$$E(\mathfrak{a}_\varrho \cdot \mathfrak{a}_\sigma) = T_{\mathfrak{A}_\varrho \mathfrak{A}_\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots m) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

gegeben sein, die als Fehleraffinoren des geordneten Vektor- bzw. Punktepaares $(\mathfrak{A}_\varrho \cdot \mathfrak{A}_\sigma)$ bezeichnet werden sollen. Die Fehleraffinoren konjugierter Vektorpaare sind konjugierte Affinoren; der Fehlertensor eines Vektors bzw. eines Punktes kann als Fehleraffinor eines sich selbst konjugierten Vektor- bzw. Punktepaares angesehen werden. Der Fehleraffinor soll additiv in seinen symmetrischen oder Tensoranteil und in seinen alternierenden oder Axiatoranteil zerlegt werden. Sowie der Fehlertensor eines Vektors bzw. Punktes im n-dimensionalen Raume durch ein immer reelles Fehlerhyperellipsoid veranschaulicht wird[3]), ist es möglich, den Tensoranteil des Fehleraffinors eines Vektor- bzw. Punktepaares (Fehlertensor des Vektor- bzw. Punktepaares) durch eine Hyperfläche zweiter Ordnung mit Mittelpunkt zu veranschaulichen. Dem Axiatoranteil des Fehleraffinors entspricht ein Bivektor des betreffenden Raumes, der Fehlerturbor. Fehlertensor und Fehlerturbor kennzeichnen die zwischen zwei Vektoren oder Punkten bestehende tensorische bzw. turborische Fehlerkorrelation. Der Fehlertensor des durch Gl. (1) gegebenen Vektors oder Punktes ist

$$T_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = \sum_{\varrho, \sigma = 1}^{m} \alpha_\varrho \alpha_\sigma T_{\mathfrak{A}_\varrho \mathfrak{A}_\sigma} = \sum_1^m \alpha_\mu^2 T_{\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\mu} + 2 \sum_{\varrho=1}^{n-1} \sum_{\sigma=\varrho+1}^{m} \alpha_\varrho \alpha_\sigma \operatorname{ts} T_{\mathfrak{A}_\varrho \mathfrak{A}_\sigma} \quad . \quad (4),$$

also nur von den Fehlertensoren der Ausgangsvektoren und der tensorischen Fehlerkorrelation der aus ihnen gebildeten Paare beeinflußt, hingegen von den allenfalls innerhalb der Paare der Ausgangsvektoren bestehenden Fehlerturbulenzen unabhängig. Die Fehlerellipse des durch Rückwärtseinschneiden bestimmten Punktes ist demnach aus den Fehlerellipsen der Altpunkte und den Fehlerkurven der aus ihnen gebildeten Paare ableitbar. Aehnlich ergibt sich, daß die tensorische Fehlerkorrelation zweier Neupunkte, deren Ortsvektoren durch Gleichungen vom Typus (1) bestimmt sind, nur durch die Fehlertensoren der einzelnen Punkte und die Fehlertensoren der Punktepaare, der Fehlerturbor des Paares der Neupunkte nur von den Fehler-Turbulenzen der Paare der Altpunkte beeinflußt wird.

---

[1]) Vergl. A. Basch, Fehlertensoren, Fehleraffinoren und allgemeine Fehlerübertragungsgesetze. Sitzungsberichte der Akademie Wien, Abt. IIa, 138. Bd. (1929), S. 125 bis 168.

[2]) Vergl. A. Basch, Fehlertensoren und Fehlerübertragung. Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 437 f. — Derselbe, Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen. Sitzungsberichte der Akademie Wien, Abt. IIa, 137. Bd. (1928), S. 583 bis 598. — Es darf nicht überraschen, daß die mathematische Erwartung einer symmetrischen Dyade, also einer im n-dimensionalen Raume durch n-Skalare gegebenen Größe keine symmetrische Dyade, sondern ein durch $\frac{1}{2} n (n+1)$ Skalare gegebener Tensor ist, da ja auch die Addition von Dyaden im allgemeinen nicht wieder zu einer Dyade führt.

[3]) Vergl. die früher zitierten Veröffentlichungen.

Ist aber ein Neupunkt durch die allgemeinere Beziehung

$$\mathfrak{S} = \sum_1^m A_\mu \mathfrak{A}_\mu \qquad \left(\sum_1^m A_\mu = I\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gegeben, wobei die A_μ Affinoren und I den Einheitstensor bedeutet, so bestehen derartige einfache Beziehungen nicht. Wird z. B. aus zwei Altpunkten mit den Ortsvektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein Neupunkt, mit dem Ortsvektor $\mathfrak{C}$ durch Vorwärtseinschneiden bestimmt, so ist wenn α und β die Dreieckswinkel in den Altpunkten, γ jenen im Neupunkte und $\mathfrak{k}$ den zur Dreiecksebene senkrechten Einheitsvektor bedeutet,

$$\mathfrak{C} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\, e^{-\beta \mathfrak{k}} \lrcorner\, \mathfrak{A} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\, e^{\alpha \mathfrak{k}} \lrcorner\, \mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$
[1])

Die Fehlerellipse des Neupunktes besteht aus vier Komponentalfehlerkurven. Je eine Ellipse geht aus den Fehlerellipsen der beiden Altpunkte durch die Drehstreckung hervor, die die Dreiecksbasis in die dem Punkte gegenüberliegende Dreiecksseite überführt. Eine Fehlerkurve entsteht aus der Fehlerkurve des Paares der Altpunkte durch zentrische Streckung im Verhältnis $\sqrt{\sin\alpha \sin\beta} : \sin\gamma$, Drehung um $^1/_2\,(\alpha - \beta)$ in positivem Sinn und eine konfokale Verformung, bei der die Summe der Quadrate der Hauptachsen mit $-\cos\gamma$ multipliziert wird. Die von der Fehlerturbulenz der Altpunkte herrührende Komponentalfehlerkurve ist ein reeller oder imaginärer Kreis. Die Summe der Quadrate der Abstände paralleler Tangenten der vier Komponentalfehlerkurven vom Mittelpunkt ergeben das Quadrat des Abstandes der parallelen Tangente der resultierenden Fehlerellipse. Der Kreis, der den Einfluß der Fehlerturbulenz der Altpunkte zum Ausdruck bringt, bewirkt hierbei keine Aenderung der Brennpunktslage, sondern hat nur Einfluß auf die Summe der Quadrate der Hauptachsen der resultierenden Fehlerellipse. Aehnliche Bildungsgesetze ergeben sich für die Fehlerkurve und den Fehlerturbor eines Paares von Neupunkten, die durch Vorwärtseinschneiden aus einem Paar von Altpunkten bestimmt wurden. 23, 19

20. Versuch eines Neuaufbaues der geometrischen Optik auf Grund eines allgemeinen Satzes.

Von **M. HERZBERGER** in Jena.

Die meisten Darstellungen der geometrischen Optik stellen in den Mittelpunkt die kollineare Abbildung, eine ausgezeichnete Geradenabbildung, die gleichzeitig eine eineindeutige Zuordnung des Punktraums gibt. Eine gegebene Abbildung wird nun derart behandelt, daß man sie mit einer kollinearen Abbildung vergleicht und die Abweichungen (die Bildfehler) untersucht.

Das Problem der optischen Abbildung als Geradenabbildung direkt aufgefaßt haben vor allem W. R. Hamilton, dessen geniales Werk auch heute noch nicht vollständig ausgeschöpft ist, die französischen Mathematiker Malus, Dupin, Gergonne, später vor allem H. Bruns und am weitesten durchgeführt A. Gullstrand. Hierbei benutzen die Autoren das verschiedenartigste mathematische Rüstzeug: Variationsrechnung, Differentialgeometrie, Theorie der Berührungstransformationen usf.

In den Problemkreis, der bei den letztgenannten Autoren vorliegt, glaubt der Vortragende am besten einzudringen mit Hilfe eines allgemeinen Satzes, den er in der Zeitschr. f. Phys. 1929 veröffentlichte.

Die Abbildungen des Strahlenraums, die prinzipiell optisch realisierbar sind (zu ihnen gehört die kollineare Abbildung nicht), unterscheiden sich dadurch von den allgemeinen Abbildungen, daß eine gewisse Differentialform der Koordinaten ein totales Differential ist.

Sei ein Strahl gegeben durch einen Punkt (Vektor $\mathfrak{a}$) und den Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ in in seiner Richtung, der Bildstrahl durch $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{s}'$, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ Funktionen von vier Parametern sind; sind n, n' die Brechungsexponenten in Objekt- und Bildraum, dann muß

$$n'\,\mathfrak{s}'\,d\mathfrak{a}' - n\,\mathfrak{s}\,d\mathfrak{a} = dE,$$

in den vier Parametern ein totales Differential sein.

Obiger Satz läßt sich leicht aus dem Brechungsgesetz ableiten, ebenso aus den Grundannahmen obiger Autoren, umfaßt diese aber sämtlich als Spezialfälle. Da sowohl

[1]) Betreffs der in dieser Gleichung verwendeten Symbolik vergl. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung. Zweite Auflage, Stuttgart 1926. S. 328 ff.

die Parameter, wie Anfangs- und Endpunkte willkürlich gewählt werden können, schmiegt er sich allen Fragestellungen der geometrischen Optik gut an.

Das wurde an einer großen Anzahl von Problemen in dem Vortrag nachgewiesen. Es wurden dem Malusschen Satz entsprechende Gesetze für Regelflächen, der Malussche Satz, die vom Verfasser verallgemeinerten Straubelschen Gesetze, die Gullstrandschen Sätze über Linienabbildung, sowie die Gesetze der Abbildung des fadenförmigen Raums abgeleitet. Bei letzteren ist zu bemerken, daß sie für rotationssymmetrische Systeme natürlich die Gaußsche Optik ergeben. Es ist interessant, daß diese dabei als Geradenabbildung erscheint und in einer Form, die im Gegensatz zur kollinearen Abbildung, mit der sie nur in der Nähe der Achse übereinstimmt, prinzipiell realisierbar ist.

Zum Schluß wurden die Bedingungen für punktförmige Abbildung eines Flächenelements, sowie einer endlichen Fläche, ferner die Bedingungen für gleichmäßige Abbildung einer endlichen Fläche bei vorhandener sphärischer Aberration aus obiger Formel abgeleitet. Diese Fragen knüpfen an Arbeiten von Thiesen, Bruns, T. T. Smith, Boegehold und Verfasser an. Eine ausführliche Darstellung der hierher gehörigen Fragen wird demnächst von H. Boegehold und Verfasser veröffentlicht werden. 23, 20.

21. Bewegung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit unter dem Einfluß von ebenen Wänden.

Von **WILHELM MÜLLER** in Prag.

Wie der Verfasser bereits ausgeführt hat, kann man die ebene Strömung einer idealen Flüssigkeit in einem rechteckig (resp. prismatisch) begrenzten Gebiet mittels elliptischer Funktionen berechnen, die in trigonometrische Funktionen übergehen, wenn zwei Gegenseiten des Rechtecks ins Unendliche rücken. Das komplexe Potential läßt sich als Summe der Logarithmen von σ-Quotienten darstellen, deren Glieder sich auf jeden der ursprünglichen Wirbel und die an den drei Seiten des Halbperiodenrechtecks gespiegelten Wirbel beziehen. Die Geschwindigkeitsfunktion ist durch die ζ- oder wegen der doppelten Periodizität durch die p- und p'-Funktionen ausdrückbar. Der Verfasser hat im Anschluß an eine Arbeit von Jaffé die Bewegungen einiger einfacher Wirbelsysteme unter dem Einfluß ebener rechteckiger Wände genauer verfolgt. Ein einziger Wirbel beschreibt z. B. eine geschlossene Bahn, die sich um so mehr einer durch das Periodenverhältnis bestimmten Grenzellipse annähert, je geringer der Abstand des Wirbels vom Mittelpunkt des Rechtecks wird. Auch zwei gleichsinnige und gleichstarke Wirbel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt des Rechtecks gelegen ist und daher diese Lage dauernd beibehält, beschreiben geschlossene Bahnen, die aber nach der Mitte zu der Kreisform zustreben. Bemerkenswert ist der Fall eines »ebenen Kanals« insofern, als hier zwei Gebiete zu unterscheiden sind, die man als Gebiet der »stabilen« und der »instabilen« Bewegung bezeichnen könnte. Während die Wirbel im inneren Gebiet auf geschlossenen Bahnen einander verfolgen, also einen mittleren Abstand behalten und jede Stellung unendlich oft annehmen, schwimmen sie im äußeren Gebiet nach verschiedenen Seiten ins Unendliche ab. Rechnerisch verfolgbar sind ferner die Fälle zweier gleicher Wirbel allgemeiner Lage im ebenen Kanal. Während z. B. der Schwerpunkt zweier gleichsinniger und gleich starker Wirbel parallel der Grenze sich verschiebt, umkreisen die Wirbel ihren Mittelpunkt in geschlossenen Bahnen, beschreiben also insgesamt trochoidenartige bzw. konchoidenartige Kurven. Die Berechnung der Absolutbahnen führt in beiden Fällen auf elliptische Integrale, die sich für besondere Lageverhältnisse auf trigonometrische und hyperbolische Funktionen zurückführen lassen. Eine ausführliche Darstellung wird in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden. 23, 21

22. Die einfach geführten Wellen in fließenden Mitteln.

Von **K. ULLER** in Gießen.

Es gibt nur einen einzigen Weg, Wellen rechnerisch darzustellen: man muß von den allgemeinen, zeitlich veränderlichen Grundgleichungen ausgehen und daraus das Gleichungssystem für eine Welle herausschälen. In ihr gibt es zwei Wellenflächen-Systeme, das der Phasen und das der Verlöschungen, die sich unter beliebigem Winkel durchkreuzen können. Im Falle einer Zweimittel-Welle besteht dieselbe aus zwei kohärenten Wellenflanken, je eine in jedem Mittel. Zuerst ist die Wellenkohärenz Bedingung, sodann

sind die physikalischen Grenz-Bedingungen an der Unstetigkeitsfläche U zu erfüllen. In der reinen Hydro- und Aerodynamik, der Fluidik, finden wir so für eine Planwelle von elementarer Schwankungsform ein keilförmiges Wellenflächen-System mit völliger Symmetrie in bezug auf die U-Ebene, wie verschieden beide Mittel hinsichtlich ihrer Dichten und Flußgeschwindigkeiten auch seien. Es existiert kein Gesetz, wonach die Phasen stets $\perp U$ sein müßten. Deshalb sind alle bisherigen Lösungen, die — wie die nach dem Standwechsel-Verfahren — auf dieser Annahme beruhen, wenn diese nicht zutrifft, hinfällig, aber auch, wenn sie zutrifft und die Mittel gleiten. Mit dem keilförmigen Wellenflächen-System ist verbunden auch eine Verlöschung längs U. Das wahre, annahmenfreie Verfahren läßt ferner eine gewisse Führung der Welle seitens der U-Fläche erkennen. Erst durch die Druckbedingung kommen die Dichten und Flußgeschwindigkeiten der beiden Mittel in die Rechnung hinein. Sie führt auf eine hochgradige komplexe Gleichung. Der reelle Teil ihrer Wurzeln liefert die möglichen Wellenlängen, der imaginäre Teil die möglichen Verlöschungen längs U. Welche von diesen mehrfachen Möglichkeiten im konkreten Falle gilt, ist eine Frage, die unbeantwortbar ist, solange man nicht auf die Entstehung und Herkunft dieser Wellen rechnerisch eingeht. Wellenlänge und Verlöschung sind abhängig von der Anordnung der beiden Dichten und Flußgeschwindigkeiten in bezug auf die Richtung der Schwere; es ist nicht gleichgültig, ob die größere Dichte bzw. Flußgeschwindigkeit oberhalb oder unterhalb der U-Fläche sich befindet.

Die Analyse dieser geführten Wellen ist vollzogen für die drei Grenzfälle: 1. keine äußeren Kräfte, 2. nur Kapillarkräfte, 3. nur Schwerekräfte. Dabei sind noch gewisse Beschränkungen in den Voraussetzungen vorgenommen. Die Schaukurven erstrecken sich über die beiden Möglichkeiten, daß die Amplituden beiderseits U nach oben und unten abnehmen (Grat-Querrelief), bzw. daß sie zunehmen (Rinne-Querrelief). Nach vorliegender annahmenfreien Theorie gibt es im Falle 1. geführte Wellen, wogegen sie nach dem Standwechsel-Verfahren unmöglich wären; wird im Falle 2. in der Grat-Welle die Wellenlänge bei positiver mittlerer mechanischer Flußgeschwindigkeit vergrößert, bei negativer verkleinert, tritt in der Rinne-Welle Tangential-Verlöschung auf, selbst wenn sie ungedämpft ist; sind im Falle 3. selbst bei gleichen Dichten, aber ungleichen Flüssen geführte Wellen möglich, bei gewissen Dichten und Flußgeschwindigkeiten aber auch unmöglich, auch gibt es Kriech-Wellen, in denen die Geschwindigkeit sehr klein ist. Die Ergebnisse sind von Bedeutung für die Geophysik (Wellen in und an der Troposphäre bzw. in und an den Ozeanen) sowie für die Wellen an Flüssigkeitsstrahlen. Die ausführliche Darstellung erscheint später in dieser Zeitschrift. 23, 22

23. Widerstands- und Tragflügelprofile mit vorgeschriebener Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche.

Von **FRITZ WEINIG** in Charlottenburg.

(Aus dem Institut für technische Strömungsforschung, Technische Hochschule Berlin.)

Druck- und Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche eines Profiles beeinflussen erheblich dessen Strömungswiderstand. Hohe Uebergeschwindigkeiten vermehren den Reibungswiderstand, große Druckgradienten bedingen verlustbringende Wirbelablösungen. Drucksenkungen bis zum Dampfdruck bedingen in tropfbaren Flüssigkeiten Kavitation, die neben den meist auftretenden großen Strömungsverlusten rasche Zerstörungen bringen. Auch bei Gasen bringen hohe Uebergeschwindigkeiten im Gebiete der Schallgeschwindigkeit zusätzlich ganz bedeutende Verluste. Es liegt deshalb der Wunsch nach Profilen mit verhältnismäßig geringen Uebergeschwindigkeiten und kleinem gleichmäßig verteilten Druckanstieg nahe.

Profil, Druckverlauf und Geschwindigkeitsverteilung sind aber eindeutig einander zugeordnet. Geschwindigkeit und Druck durch die Bernoullische Gleichung

$$\frac{\varrho}{2} w^2 + p + \gamma h = \text{konst.},$$

Geschwindigkeitsverteilung und Profil durch den Hodographen. In jedem Punkt der Oberfläche des Profils ist die Konstruktion eines Geschwindigkeitsdreiecks aus Transportgeschwindigkeit, Relativgeschwindigkeit und Absolutgeschwindigkeit möglich. Zeichnet man alle Geschwindigkeitsdreiecke über der Transportgeschwindigkeit als gemeinsamer Grundlinie, so bilden die freien Endpunkte den Hodographen. Durch die Abbildung

$$\zeta = u(z) + i\,v(z)$$

die eine konforme ist, wird aber nicht nur das Profil in der z-Ebene in den Hodographen in der ζ-Ebene abgebildet, sondern auch das ganze Strömungsfeld auf das Innere des Hodographen. Da aber das Profil Verzweigungsstromlinie ist, so ist die Abbildung durch den Hodographen nicht eindeutig. Zu jeder Seite des Profils gehört nämlich eine in sich geschlossene Hodographenlinie.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, ein Profil zu suchen, das einen gegebenen Hodographen, also eine hierdurch vorgeschriebene Geschwindigkeitsverteilung besitzt. Dem Hodographen sind ja deutlich die Uebergeschwindigkeit und der Charakter des Druckanstiegs zu entnehmen. Einige Schwierigkeit bedeutet nur das Verhalten des Hodographen für die Strömung im Unendlichen. Dieses ist aber leicht dem Hodographen der zirkulationsfreien Strömung um einen Kreiszylinder (Abb. 1) zu entnehmen. In der Nähe der singulären Stelle des Hodographen gilt

$$\psi = \lambda \cdot \frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{|\zeta|} .$$

Durch die Abbildung $\eta = \zeta^{1/2}$ erhält man hieraus die Strömung aus einer gewöhnlichen Doppelquelle. (Abb. 2.)

$$\psi = \lambda \frac{\sin \alpha}{|\eta|^2} .$$

Bildet man auch den Hodographen durch $\eta = \zeta^{1/2}$ konform ab, so ist die Zuordnung dieser Abbildung und der ursprünglichen Strömung nunmehr eindeutig. Bei der zirkulations-

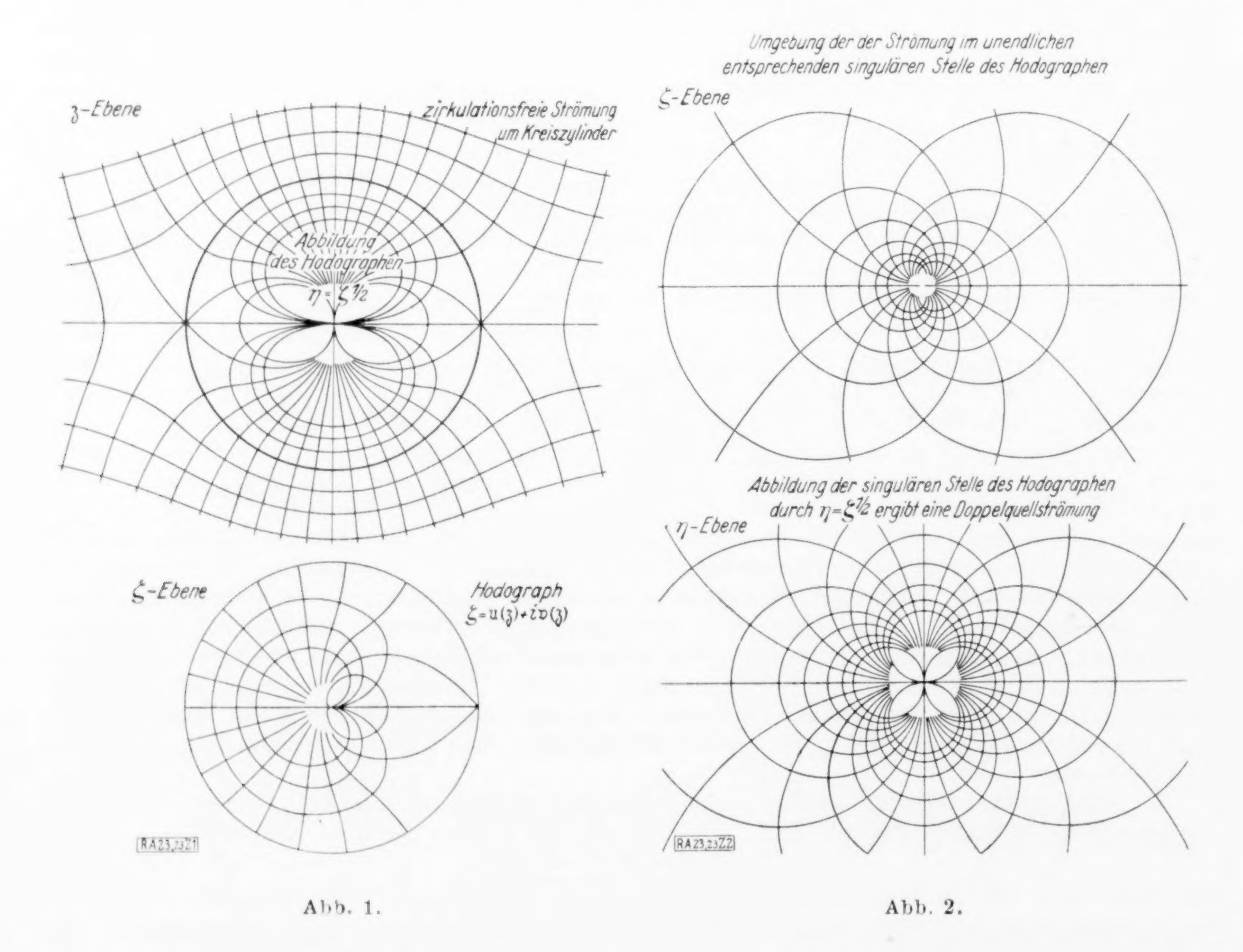


Abb. 1. Abb. 2.

freien Strömung um den Kreiszylinder erhält man hierbei zufällig die Strömung im Innern eines Kreises, die entsteht bei Ueberlagerung einer Transportströmung über eine Doppelquelle (Abb. 1.)

Hat man sich einen allgemeinen Hodographen gegeben, so macht man diesen durch die Abbildung $\eta = \zeta^{1/2}$ eindeutig. Im Punkte $\eta = 0$ bringt man dann der Reihe nach an:

1. eine Doppelquelle mit der Achse in der ungestörten Strömungsrichtung,
2. eine Doppelquelle mit Achse senkrecht zur Strömungsrichtung,
3. einen der Zirkulation entsprechenden Wirbel

und bestimmt ihr gegenseitiges Stärkeverhältnis so, daß die Punkte $\eta = 1$ und $\eta = -1$ Staupunkte werden, nachdem man für jeden einzelnen Anteil die Randwertaufgabe $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ durch geeignete Methoden gelöst hat. Im weiteren hat man dann nur noch durch die Umkehrung $\zeta = \eta^2$ den eigentlichen Hodographen mit der Verteilung der φ auf dem Rande zu bilden und hieraus durch einige selbstverständliche Quadraturen das gesuchte Profil selbst zu ermitteln.

Während die üblichen Methoden von der leichten rechnerischen Durchführbarkeit der Aufgabe ausgehen und Profile mit strömungstechnisch meist unzweckmäßigem Druckverlauf ergeben, fußt die beschriebene auf der Erfüllung gewisser physikalischer Vorschriften. Leider ist es bisher nicht gelungen, eindeutige Beziehungen zwischen Druckverlauf und Strömungsverlusten zu finden, so daß bei der Wahl eines vorzuschreibenden Hodographen noch das Gefühl des Ingenieurs entscheiden muß. Es steht aber fest, daß auch so schon Vorteile aus dem beschriebenen Verfahren gezogen werden können. 23, 23

24. Bemerkungen zur Oseenschen Hydrodynamik.

Von **F. NOETHER** in Breslau.

Während Stokes bei der Ableitung seiner Widerstandsformel in zähen Flüssigkeiten alle quadratischen Glieder der hydrodynamischen Differentialgleichungen gestrichen hat, zeigte Oseen bekanntlich, daß dieses Verfahren unzulässig ist, und hat durch Berücksichtigung der »halbquadratischen« Glieder, d. h. der von der parallelen Grundbewegung herrührenden Trägheitsglieder, die erste völlig befriedigende Ableitung der Stokesschen Formel gegeben. Sie läßt sich, im Gegensatz zur ursprünglichen Ableitung, auch auf den 2-dimensionalen Fall übertragen und kann, was wichtiger ist, als erstes Glied einer nach Potenzen einer »Reynoldsschen« Zahl $\mathfrak{R}$ fortschreitenden Entwicklung aufgefaßt werden, die die gestrichenen quadratischen Glieder sukzessive berücksichtigt. Die ersten Schritte dieser Entwicklung sind in der Literatur[1]) durchgeführt; der Plan der Oseenschen Untersuchungen ist aber der, von dieser Entwicklung ausgehend zu einer Diskussion des analytischen Verhaltens der Lösungen im entgegengesetzten Grenzfall großer Reynoldsscher Zahlen vorzudringen.

Als ein qualitativer Schritt zu diesem Programm ist es aufzufassen, wenn Oseen zunächst den Grenzübergang $\mathfrak{R} \to \infty$ an den »linearisierten« Gleichungen selbst:

$$\varrho\, U \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} - \mu \Delta \mathfrak{u} + \operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{u} = 0$$

ausführt. Das Ergebnis dieses Grenzübergangs ist die Einteilung des gesamten Raumes in wirbelfreie Gebiete und ein von bestimmter Wirbelverteilung erfülltes Gebiet hinter dem umströmten Körper, mit geometrisch festgelegten Grenzen.

Dieser Grenzübergang wird von dem Vortragenden durch Ausgang von der Helmholtzschen Wirbelgleichung in einer vereinfachten Form dargestellt, die die resultierende Wirbelverteilung unmittelbar verständlich macht, zugleich aber auch den nur qualitativen Charakter dieser Form des Ansatzes verdeutlicht. Der innere Grund für die auch in der Prandtlschen Grenzschichttheorie abgeleitete Wirbelablösung liegt in einer Unsymmetrieeigenschaft der hydrodynamischen Differentialgleichungen, und diese Unsymmetrie kommt qualitativ schon in den obigen linearisierten Gleichungen zum Ausdruck.

Nähere Ausführungen enthält der demnächst erscheinende Artikel: Integrationsprobleme der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen im Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. V, S. 786 f. 23, 24

[1]) Vergl. das Lehrbuch: Oseen, Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, 1928.

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit.

Pippard und Baker führen die **Berechnung eines am Umfange beliebig belasteten Rades** mit an die Nabe und den Ring steif angeschlossenen Speichen nach der Methode von Castigliano durch (Philosophical Magazin 1929). Das statisch bestimmte Grundsystem ist so gewählt, daß alle Speichen bis auf eine an deren Anschlußstelle an die als feststehend und starr angesehene Nabe, der Ring aber gerade an dessen Anschlußstelle an die nicht durchhgeschnittene Speiche durchschnitten gedacht sind. Die Formänderung aus Biegung und Druck wird berücksichtigt, die aus Schub dagegen vernachlässigt. Die Untersuchung ist für eine radiale und eine tangentiale Einzellast gesondert durchgeführt; die inneren Kräfte aus jedem beliebigen, den Ring belastenden Lastsystem folgen durch Ueberlagerung. Die allgemeinen Resultate sind, wie gar nicht anders zu erwarten, recht unübersichtlich; interessant und leichter zu übersehen sind die Resultate für gewisse Grenzfälle, insbesondere für den Fall des starren Ringes. Der als erster genannte Verfasser hat in früheren Arbeiten das Schwungrad mit gleichmäßiger und mit beschleunigter Rotation behandelt (Institution Mechanical Engineers Jan. 1924, Jan. 1926).

Die frei aufliegende Rechteckplatte unter Einzelkraftbelastung ist theoretisch und experimentell von M. Bergsträsser (Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, V.D.I., Heft 302) untersucht worden. Beide Untersuchungen knüpfen eng an frühere Arbeiten von Nádai an, von dem auch die Anregung und der Versuchsplan zur Bergsträsserschen Untersuchung stammt. Bergsträsser geht von der Nádaischen Lösung für die Einzelkraftbelastung eines frei aufliegenden Plattenstreifens aus. Durch Ueberlagerung zweier passender äquidistanter Folgen solcher Lösungen kommt man zur gesuchten Lösung für eine Rechteckplatte mit den Navierschen Grenzbedingungen mit einer konzentrierten Einzellast an beliebiger Stelle belastet; diese Lösung ist eine einfache Reihe (jedes Glied ein Produkt aus trigonometrischen und exponentiellen Funktionen) und hat gegenüber der Navierschen Doppelreihenlösung auch noch die ganz wesentlich schnellere Konvergenz voraus. Die Lösung wird zahlenmäßig ausgewertet für eine Platte mit dem Seitenverhältnis 3 : 2 mit vier verschiedenen z. T. unsymmetrischen Laststellungen, ferner für Platten mit dem Seitenverhältnis 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 mit konzentrierten Einzellasten in der Mitte. Die Versuche beziehen sich nur auf die mittige Belastung. Zunächst wurden die beiden Elastizitätskonstanten und zwar nach dem Vorgang von Nádai an den Platten selbst ermittelt. Bei wirklich freier Auflagerung sind bekanntlich die Navierschen Grenzbedingungen nicht befriedigt. In der Tat zeigte sich das bekannte Sichabheben der Ecken, bei der quadratischen Platte im Betrage von rd. $^1/_4$ der größten Durchbiegung, die natürlich mit der auf Grund der Navierschen Grenzbedingungen erhaltenen nicht übereinstimmt; die Abweichungen sind bei sehr länglichen Platten sehr geringfügig, bei quadratischen erreichen sie aber 30 vH der auf Grund der Navierschhen Voraussetzung errechneten Durchbiegung. Wurde dagegen an den Ecken die rechnungsmäßige negative Eckstützkraft auf die Platte ausgeübt, so wurde das Abheben der Ecken tatsächlich verhindert und die Durchbiegung stimmte mit der errechneten innerhalb Versuchsgenauigkeit (1 vH) genau überein. Dieses Ergebnis ist nur als eine neuerliche Bestätigung der Grundannahmen der Elastizitätstheorie der Platte anzusehen. — Weiter wurde die Unterstützung der Seiten der quadratischen Platte eingeschränkt und untersucht, wie sich dabei die zum Festhalten der Ecken erforderliche negative Eckstützkraft ändert.

Es wäre naheliegend und mindestens theoretisch interessant, die „gemischte Randwertaufgabe" der wirklich frei aufgelagerten Platte bei diesem Anlasse auch theoretisch wenigstens in Angriff zu nehmen. Sie ist schwierig und gehört zur Gruppe von Aufgaben über „veränderlich gestützte Konstruktionen" (nach der Ausdrucksweise von Müller-Breslau), für die also die Auflagerung für verschiedene Lastanordnungen verschieden ist, so daß im allgemeinen eine Ueberlagerung der Lastwirkungen nicht zulässig ist.

A. Dinnik (Dniepropetwosk) behandelt **die elastische Knickung von beiderseits gelenkigen oder festeingespannten Stäben mit veränderlichem Querschnitt.** (Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 1928). Er geht von der bekannten Differentialgleichung der elastischen Linie aus und integriert dieselbe exakt für den Fall, daß das Trägheitsmoment nach einer Exponentialfunktion und den weiteren, daß es nach einem Potenzgesetz abnimmt. In beiden Fällen gelingt die exakte Lösung mit Hilfe von Besselschen Funktionen in geschlossener Form. Der Fall des doppelkegelförmigen und des geradlinig zulaufenden (doppelkeilförmigen) Stabes ordnet sich in das Potenzgesetz ein, jedoch arten die Lösungen in diesen Fällen in besonders einfache, mit den üblichsten Funktionszeichen darstellbare Funktionen aus. Die Resultate sind durchweg zahlenmäßig ausgewertet und tabellarisch dargestellt, so daß der

Aufsatz eine Fülle von gebrauchsfertigen Ergebnissen bietet. Es ist nur zu bemerken, daß für die beiderseitige Kollernspannung dieselben Stabformen untersucht sind, wie für die beiderseitig gelenkige Lagerung (also gegen die Mitte monoton verstärkte Querschnitte), obschon doch für die erstere Lagerungsart offenbar andere Stabgestaltung als zweckmäßig in Frage kommen kann.

Ebenfalls das elastische Knickproblem von Stäben mit veränderlichem Querschnitt wird behandelt, jedoch mit viel weiter gesteckten Zielen von Fritz Kiessling in zwei sehr bemerkenswerten Abhandlungen („Ueber die Bestimmung der günstigsten Form gerader auf Knickung beanspruchter Stäbe", Goeteborgs Kungl Vetenskaps och Vitterhets Samhälles Handlingar, 5. B. $^1/_3$, 1928 und Teknisk Tidskrift 1929). Kiessling betrachtet den einseitig eingespannten Stab und geht von der bekannten Arbeitsbedingung des Knickens aus. Diese Arbeitsbedingung dient ihm aber zunächst nur als Ausgangspunkt zur Ableitung einer Reihe allgemeiner Zusammenhänge, zu denen er mit Hilfe des Hilbertschen Entwicklungssatzes gelangt. Er kommt auf diesem Wege zu der (im übrigen wohl bekannten) Differentialgleichung der elastischen Linie des einseitig eingespannten Stabes mit veränderlicher Axialkraft $S(x)$ und veränderlichem Trägheitsmoment $J(x)$ in folgender einfacher Form

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{d x}\left[\dfrac{1}{S(x)}\dfrac{d\omega}{d x}\right]+\lambda\dfrac{\omega(x)}{J(x)}=0 \\ \text{mit den Grenzbedingungen} \\ \omega(l)=0\,,\qquad w'(o)=0 \end{array}\right\}\ \text{(B)},$$

wo $\omega(x)=J(x)\,y''(x)$ und λ ein zunächst unbestimmter Beiwert ist; aus der Bedingung, daß die Gleichung ein von 0 verschiedenes Integral besitzen soll, ergeben sich die Eigenwerte λ, mit welchen die Knicklasten umgekehrt proportional sind. Weiter weist Kiessling nach, und dies ist wohl eines der wichtigsten Resultate der Untersuchung, daß die Biegelinie jenes Stabes der bei vorgeschriebener Beziehung zwischen J und F und vorgeschriebenem Volumen $V=\int_0^l F\,d x$ den kleinsten Wert λ_1, also die größte „erste Knicklast", aufweist, außer der obigen Gleichung B auch noch der Beziehung

$$\left.\begin{array}{l} \omega=C\dfrac{J}{\sqrt{\dfrac{d J}{d F}}} \\ \text{mit den Grenzbedingungen} \\ \omega(l)=0\,,\qquad \omega'(o)=0 \end{array}\right\}\ \text{(C)}$$

genügen muß; aus den Beziehungen C unter Heranziehung von B ergibt sich die gesuchte Funktion $J(x)$ und zugleich auch der Eigenwert λ, welcher die Knicklast des optimalen Stabes liefert; die Beziehung gilt allgemein unter der Voraussetzung, daß $S(x)$ unabhängig von $F(x)$ bzw. $J(x)$ ist, also nicht mit der veränderlichen Stabform variiert zu werden braucht. Auf Grund dieser Beziehungen löst Kiessling exakt eine ganze Anzahl von Knickaufgaben für Stäbe mit gegebener Form und Aufgaben über günstigste Stabform (soweit obige Bedingung für $S(x)$ befriedigt ist); unter anderem gibt er eine neue Ableitung der von Liénard (Journal de l'École Polytechnique, 1922) gegebenen Lösung für das klassische Problem des günstigsten Meridianschnittes des einseitig eingespannten gewichtslosen Umdrehungskörper-Stabes.

Des weiteren stellt sich Kiessling die Aufgabe, Näherungslösungen von Aufgaben der oben erwähnten Art, außerdem aber auch von Knickaufgaben mit Berücksichtigung des Eisengewichts (bei welchen also $S(x)$ von $F(x)$ abhängt) zu geben. Zu diesem Zwecke kleidet er im engsten Anschluß an die exakten Zusammenhänge, die er in der ersten Hälfte seiner Untersuchung gefunden hat, die Aufgabe, für eine gegebene Stabform die Knicklast aufzufinden, auch noch in folgende Form: die Funktion $y(x)$ ist so zu wählen, daß

$$\frac{1}{\lambda}=c=\frac{\int_0^l S(x)\,y'^2(x)\,d x}{\int_0^l J(x)\,y''^2(x)\,d x}$$

ein Maximum werde; das Maximum selbst liefert den Eigenwert λ des Problems, aus welchem die Knicklast ohne weiteres folgt. Kiessling ermittelt nun die Funktion y' näherungsweise, indem er

$$y'(t)=C_0+C_1\,t^{k_1}+C_2\,t^{k_2}+\ldots+C_n\,t^{k_n}\quad\left(t=\frac{l-x}{l}\right)$$

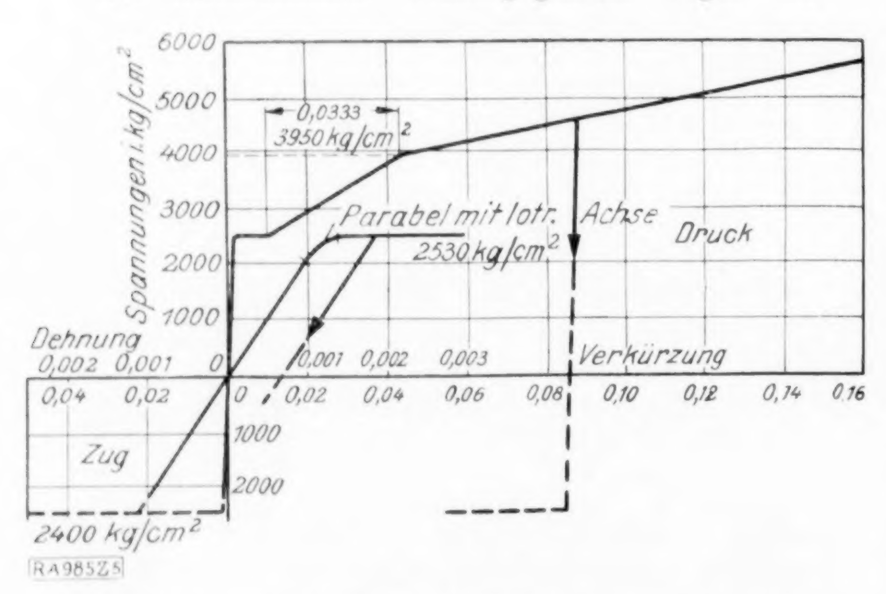
ansetzt, wobei die Werte C leicht den Grenzbedingungen angepaßt und die bestmöglichen k-Werte aus der obigen Maximumbedingung ermittelt werden können. Dabei können $J(x)$ und $S(x)$ auch ihrerseits als noch willkürliche Exponenten als Parameter enthaltende Potenzfunktionen angesetzt werden, ohne daß die Durchführung der Rechnung auf Schwierigkeiten stoßen würde. Es zeigt sich, daß man in vielen Fällen schon sehr gute Näherungslösungen mit Hilfe des einfachen Ansatzes

$$y'(t)=t^k-1$$

(welcher schon den Grenzbedingungen genügt) erhalten kann. Trägt man nun den Eigenwert als Funktion der die Stabform kennzeichnenden Parameter auf, so erhält man eine Kurve, deren Extremwert die günstigste Stabform innerhalb der betrachteten Mannigfaltigkeit von Stabformen und die zulässige Knicklast angibt. Diese einfache Näherungsmethode wird auf einige in der ersten Hälfte der Untersuchung exakt gelöste Fälle, ferner auf die von Greenhill betrachtete Aufgabe der Knickung unter Eigengewicht angewendet und es zeigt sich, daß die Resultate sehr gut übereinstimmen. Auch einige neue Resultate werden gewonnen. — Der Verfasser ist dabei, die Nähe-

rungsmethode eingehender zu bearbeiten und wird in einer demnächst erscheinenden Abhandlung u. a. auch eine praktisch gut anwendbare Fehlerabschätzung bringen.

Das von Engesser aufgeworfene und von ihm sowie von v. Kármán im wesentlichen gelöste Problem der Knickung eines Stabes mit konstantem Querschnitt außerhalb der Elastizitätsgrenze wurde von Westergaard (Urbana) und Osgood (Ithaca, N. Y.) aufgegriffen und sowohl für den bereits von Kármán behandelten Fall exzentrischen Lastangriffes als auch für den von ihm noch nicht näher betrachteten Fall des anfänglich gekrümmten, beiderseits gelenkig gelagerten Stabes vollständig gelöst und das Ergebnis in Form von Schlankheit-Knicklastkurven aufgetragen (Transactions of the American Society of Mechanical Engineers). Die grundlegenden Annahmen der Untersuchung sind von Kármán unverändert übernommen; als Spannungs-Dehnungsdiagramm ist der neuen Untersuchung die nebenstehend wiedergegebene Figur zu-



grunde gelegt; die elastische Linie ist näherungsweise als aus ein bzw. zwei Cosinusgliedern bestehend angesetzt. Die zahlenmäßigen Rechnungen sind für den Fall des Rechteckquerschnittes durchgeführt. Der Aufsatz bringt keine grundsätzliche oder qualitativ neue Erkenntnisse, doch viel an konkreten nützlichen Resultaten.

Die Spannungsverteilung in einer rotierenden Scheibe nach Ueberschreitung der Fließgrenze wurde von Nádai (Göttingen) und Donnell (Ann. Arbor Mich.) in der Forschungsabteilung der Westinghouse Electric & Mfg. Co., East Pittsburgh, theoretisch untersucht und die Resultate wurden in einer knappgefaßten, sehr bemerkenswerten Abhandlung (Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 1928/22) niedergelegt. Die Verfasser betrachten die Scheiben von konstanter, geringer Stärke und können sich somit auf das ebene Problem beschränken. Als Spannungs-Dehnungs-Diagramm legen sie, wie es von Prandtl und seiner Schule stets gemacht wird, außerhalb der Proportionalitätsgrenze $\tau = \text{const}$ zugrunde, was für verhältnismäßig kleine Formänderungen noch zulässig erscheint. Was die Fließbedingung anbelangt, wird die ganze Untersuchung durchgeführt erstens unter Annahme der Mohrschen, zweitens unter Zugrundelegung der Mises-Henckyschen Hypothese, welch letztere ja bekanntlich durch neuere Versuche insbesondere von Lode und von Roš-Echinger als recht genau nachgewiesen wurde. Die Integration der Differentialgleichung ist sowohl für die im ganzen Bereich als auch die nur teilweise plastizierte Scheibe auf Grund beider Annahmen durchgeführt; sie erfordert unter Zugrundelegung der genaueren Fließbedingung allerdings erheblich mehr Rechenarbeit und gelingt überhaupt nicht in geschlossener Form. Der Unterschied, der durch die Verschiedenheit der Fließbedingung verursacht wird, ist für die radialen Spannungen nicht sehr erheblich, dagegen prozentual sehr bedeutend für die tangentialen Spannungen. Unter gewissen hypothetischen aber plausiblen Annahmen werden ferner noch die bleibenden Formänderungen ermittelt. Die Untersuchung ist sowohl für Vollscheiben als auch für Hohlscheiben (zahlenmäßig ausgewertet für Durchmesserverhältnis 1 : 5) durchgeführt.

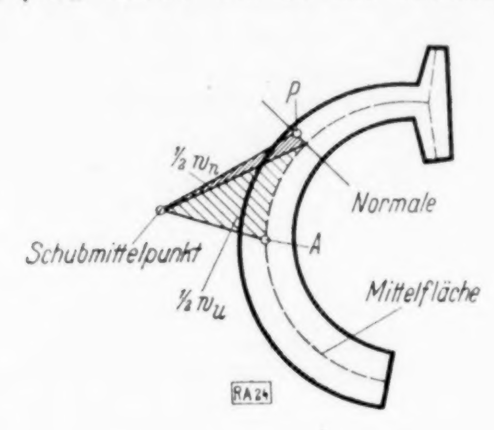
Die eigentliche Abhandlung enthält nur die Voraussetzungen und die in graphischer Form mitgeteilten Resultate der oben angedeuteten Untersuchungen; die mathematischen Ableitungen sind nur in gedrängter Form in einem Anhang dargelegt. Ein weiterer Anhang bringt dann, über das im eigentlichen Aufsatz gebotene hinausgehend, einen Versuch, das Problem unter Zugrundelegung einer die wirklichen Verhältnisse besser approximierenden Spannungs-Dehnungskurve zu behandeln, und zwar wird außerhalb der Elastizitätsgrenze an Stelle von $\sigma = \text{const}$ $\sigma = \alpha\varepsilon + \beta$ (wo α, β konstanten) angenommen. Ferner wird die Annahme gemacht, daß die Formänderungen im Vergleich zu den Scheibenabmessungen noch immer gering sind, daß die plast. Formänderungen frei von Volumänderungen verlaufen und schließlich wird noch die Hypothese gemacht, daß die Mohrsche Figur der drei Hauptdehnungskreise mit jener der drei Hauptspannungskreise geometrisch ähnlich ist. Mit diesen vereinfachenden Annahmen gelingt die Lösung für Vollscheiben.

Berlin. P. Neményi. 985

Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Von Herbert Wagner (Festschrift »Fünfundzwanzig Jahre Technische Hochschule Danzig« Seite 329).

Die de Saint Venantsche Theorie der Verdrehung gilt nur für prismatische Stäbe, längs deren Länge das Torsionsmoment M konstant ist und bei welchen die Querschnittswölbung sich ungehindert ausbilden kann. Und zwar berechnet sich bei »offenen Profilen« (das sind solche Profile, deren Querschnitt keinen Hohlraum umschließt und die verhältnismäßig geringe Wandstärke haben) die Größe des Wölbungspfeiles ξ zu $\xi = \frac{d\varphi}{dx} w = \varphi' w$ (φ Ver-

drehungswinkel, x Koordinate in Profillängsrichtung), wobei der »Einheitswölbungspfeil« $w = w_u + w_n$ durch die in der Abbildung an-



gegebenen Flächen dargestellt werden kann. Die Wahl des Punktes A wollen wir so treffen, daß der Mittelwert von w über die Querschnittsfläche Null wird.

Ist nun die Querschnittswölbung z. B. an einem Ende des Profils verhindert oder ist das Drehmoment längs der Länge des Profils veränderlich, so entstehen im Profil Längsspannungen. Beim offenen Profil berechnen sich diese Längsspannungen zu $\sigma_{bd} = \varphi'' E w$ (E Elastizitätsmodul); sie sind also dem Einheitswölbungspfeil w proportional. Dem Auftreten dieser Längsspannungen entspricht ein Widerstand gegen Verdrehung; und zwar treten im Querschnitt Schubspannungen τ_{bd} auf, die (in ähnlicher Weise wie beim durch eine Querkraft gebogenen Balken) durch die Aenderung von σ_{bd} in x-Richtung hervorgerufen werden und die über den Querschnitt ein resultierendes Drehmoment ergeben von der Größe $M_{bd} = \varphi''' E C_{bd}$. Die Konstante C_{bd} (Biegungsverdrehungswiderstand) hat den einfachen Wert

$$C_{bd} = \int_F w^2 \, dF \quad (F = \text{Querschnittsfläche}).$$

Man erhält diese Gleichung entweder direkt aus den Längsspannungen σ_{bd} mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten oder auch durch Betrachtung der Schubspannungen τ_{bd}.

Das gesamte vom Querschnitt aufgenommene Torsionsmoment beträgt dann

$$M = M_T + M_{bd} = \varphi' G J_T + \varphi''' E C_{bd}$$

($G J_T$ Drillungssteifigkeit). Dies ist die Differentialgleichung der Biegungsverdrehung[1]).

Drückt man ein offenes Profil in Längsrichtung, so zeigt sich, daß unter gewissen Voraussetzungen das Profil nicht nach Euler knickt, sondern schon vor Erreichung der Eulerschen Knicklast um den Schubmittelpunkt »wegdreht«[2]). Dieses Wegdrehen wird für zentrisch und exentrisch gedrückte Profile und auch für gegen Verdrehung elastisch gestützte Profile berechnet, und es wird gezeigt, daß dieses Wegdrehen in gewissen Fällen ein reines Stabilitätsproblem darstellt. Man erhält z. B. für den einfachsten Fall des zentrisch gedrückten Profils für die Größe der Druckkraft, bei der das Profil wegdreht (Stabilitätsgrenze), den Wert

$$P = \frac{F}{J_{SP}} \left(G J_T + \frac{\pi^2}{L^2} E C_{bd} \right).$$

Hierin bedeutet J_{SP} das polare Trägheitsmoment des Profilquerschnitts um den Schubmittelpunkt, L die Länge des Profils. Dann werden an Hand der Rechnung verschiedene Gesichtspunkte für die Druckfestigkeit solcher Profile besprochen und schließlich wird der Anwendungsbereich der Rechnung umgrenzt.

Danzig. H. Wagner. 24

[1]) **Für den besonderen Fall von zweiflanschigen Profilen hat C. Weber eine entsprechende Differentialgleichung aufgestellt. Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 85.**

[2]) **Für zentrisch belastete Winkelprofile ist dieses Wegdrehen bereits von P. Bryan untersucht worden. Vergl. z. B. Rudolf Mayer »Die Knickfestigkeit«, Berlin 1921, S. 35.**

KLEINE MITTEILUNGEN

Graphische Auflösung eines linearen Gleichungssystems. Für das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{i=m+1} a_{mi} x_i = c_m ,$$

wobei $m = 1, 2 \ldots n$ ist und $a_{n,n+1} = 0$,

ergibt sich durch Betrachtung eines mechanischen Gebildes eine im Prinzip einfache graphische Auflösung, welche zu den graphischen Behandlungen für Dreimomentengleichungen und anderer Gleichungen Clapeyronscher Art von Claxton Fidler[1]), H. Müller-Breslau[2]), A. Ostenfeld[3]) und besonders P. Pasternak[4]) in enger Beziehung steht.

Die unbekannten Größen, $x_1, x_2, \ldots$, werden in Abb. 1 als x-Koordinaten der Eckpunkte $A_1, A_2, \ldots$ eines horizontalen Stabzuges mit

[1]) **T. Claxton Fidler, Minutes of Proceedings, Institution of Civil Engineers, Vol. 74, 1883, p. 196; Practical Treatise on Bridge Construction, London 1887.**

[2]) **H. Müller-Breslau, Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen, Zeitschr f. Bauwesen, Bd. 41, 1891, S. 103; Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, 1. Abt., 1892, S. 357 (5. Aufl., 1922, S. 406); Bd. 2, 2. Abt., 1908, S. 37 (2. Aufl. 1925, S. 93).**

[3]) **A. Ostenfeld, Teknisk Elasticitetslaere, Kopenhagen 1898, S. 130 (4. Ausg., 1924, S. 230); Teknisk Statik II, Kopenhagen 1900, S. 92, 108 (3. Ausg., 1925, S. 88, 118); Zeitschr. f. Arch. u. Ingenieurwesen, Bd. 51, 1905, S. 47, Bd. 54, 1908, S. 57.**

[4]) **P. Pasternak, Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke, I, Zürich u. Leipzig 1927, S. 59.**

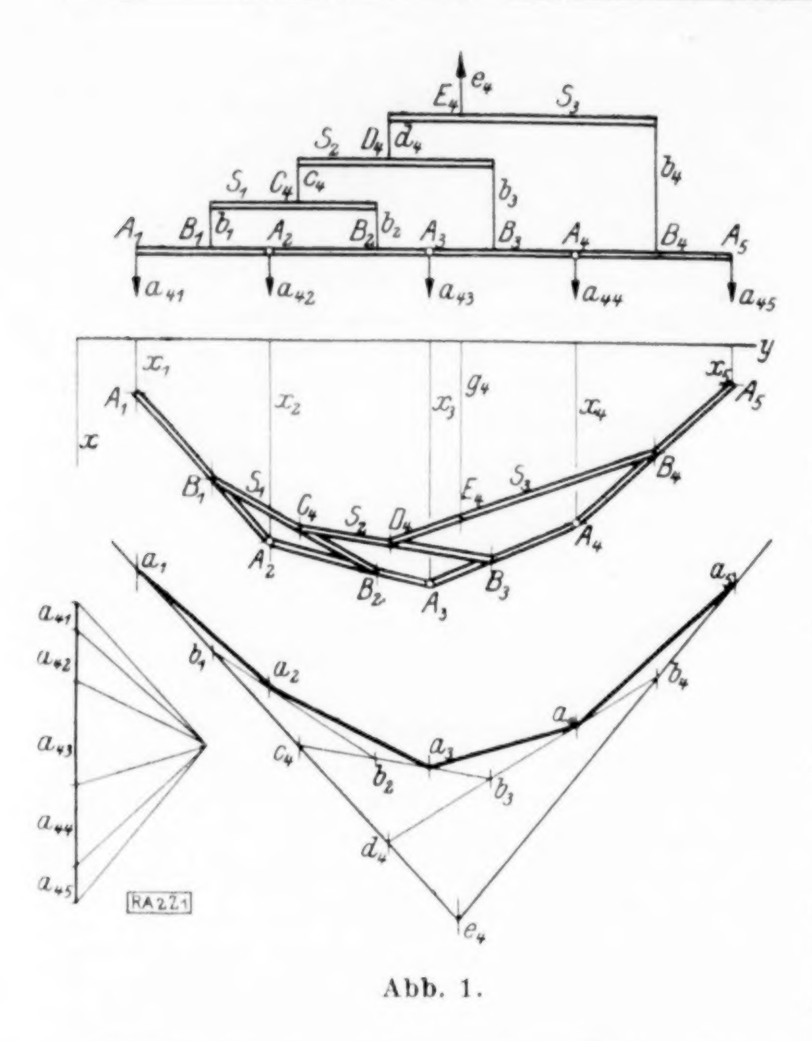


Abb. 1.

Gelenken an A_2, A_3, ..., dargestellt. Die y-Koordinaten der Eckpunkte sind willkürlich gewählt. Zur Behandlung z. B. der vierten Gleichung denke man sich die Gewichte a_{41}, a_{42}, ... a_{45} an A_1, A_2, ... A_5 angebracht, und den Stabzug A_1 ... A_5 mittels der Horizontalstäbe S_1, S_2 und S_3 an E_4 aufgehängt. Indem man die linke Seite der vierten Gleichung als Momentensumme auffaßt[5]), so ergibt sich die x-Koordinate g_4 von E_4 aus der Bedingung $(a_{41} + \ldots a_{45})\, g_4 = c_4$, während die y-Koordinate sich mittels des Seilpolygones $a_1 a_2 \ldots a_5 e_4$ für die Kräfte a_{41}, a_{42}, ... a_{45} bestimmen läßt. Das Seilpolygon $a_1 a_2 \ldots a_5 b_4 b_3 b_2 b_1$ für sämtliche auf dem Stabzuge $A_1 \ldots A_5$ wirkende Kräfte muß an a_2, a_3 und a_4 schließen, um die Biegungsmomente an den Gelenken verschwinden zu lassen. Ferner bemerkt man, daß die Dreiecke $b_1 b_2 c_4$ und $c_4 b_3 d_4$ Seilpolygone für die auf S_1 bzw. S_2 wirkenden Kräfte sind.

Kennt man die Punkte B_1, B_2 und B_3 (aber noch nicht A_1, A_2 ...), so kann man nach Zeichnen des Seilpolygones $a_1 a_2 \ldots a_5 e_4$ der Reihe nach die Punkte b_1, b_2, b_3, b_4, c_4 und d_4 festlegen, und sonach die Vertikalprojektion des Stabsystemes fertigzeichnen. In der Horizontalprojektion erhält man nun C_4 auf $B_1 B_2$, D_4 auf $C_4 B_3$ und endlich B_4 auf $D_4 E_4$. Also erhält man aus den Festpunkten B_1, B_2, B_3 und aus der vierten Gleichung den Festpunkt B_4 der vierten Polygonseite. Im allgemeinen Falle erhält man bei diesem Verfahren aus den Festpunkten B_1 ... B_{m-1} und aus der $m$ten Gleichung einen Festpunkt B_m der $m$ten Polygonseite. Die erste Gleichung liefert den Festpunkt B_1. Sonach führt eine fortschreitende Anwendung des Verfahrens zur ganzen Reihe der Festpunkte B_1, B_2, ... Die letzten zwei Glei-

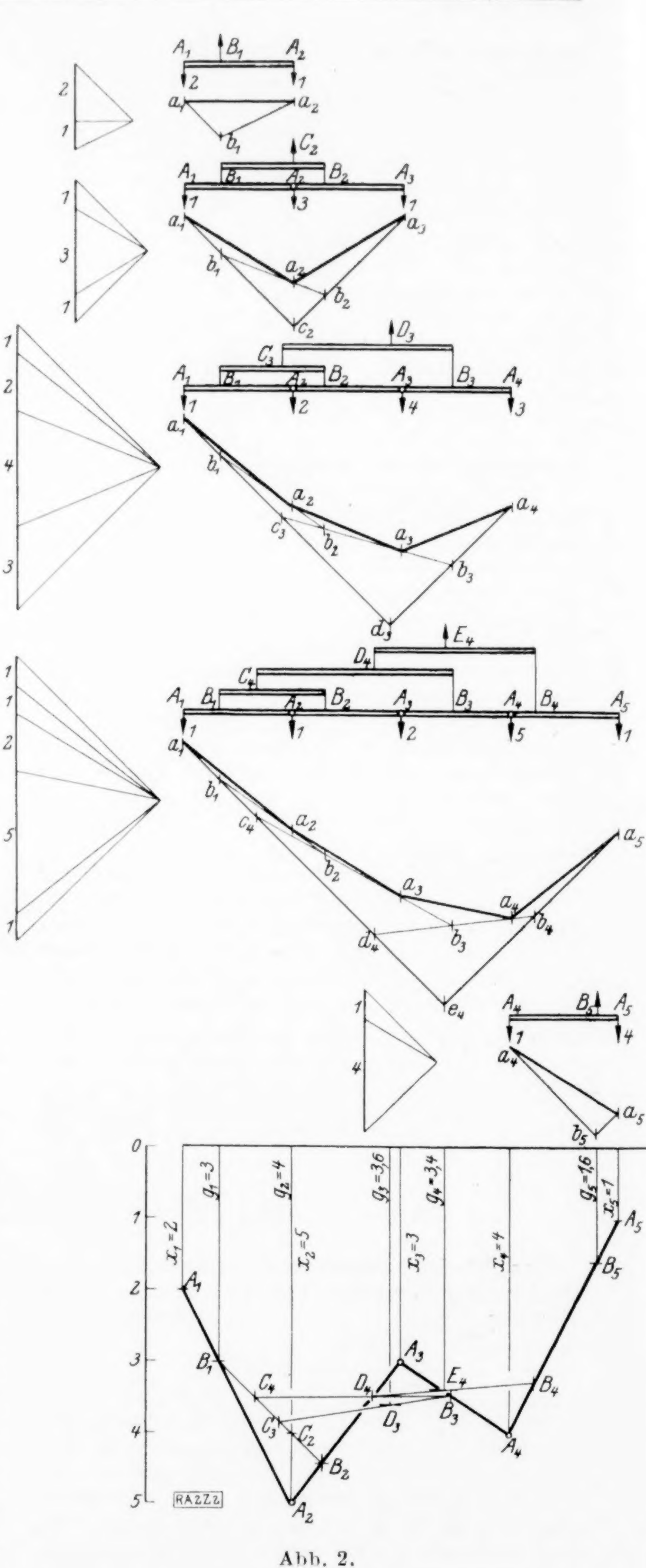


Abb. 2.

[5]) Diese Deutung ist von A. Ostenfeld, Teknisk Statik II, 3. Ausg., 1925, S. 93, 119, nach Vorschlag von A. S. P. Petersen, Ingeniören, Kopenhagen 1918, S. 316, und P. Pasternak, a. a. O., S. 59, benutzt worden.

chungen liefern zwei Festpunkte, B_{n-1} und B_n, auf der letzten Seite, wonach man das Polygon $A_n A_{n-1} \dots A_1$ zeichnen kann.

Wenn $a_{41} = 0$ ist, so muß C_4 senkrecht über B_2 liegen. Die Stäbe $A_1 A_2$ und S_1 können dann bei der Behandlung der betreffenden Gleichung außer acht gelassen werden, und die Polygonsysteme vereinfachen sich dementsprechend.

Abb. 2 zeigt ein Beispiel. Nach Zeichnen der Seilpolygonsysteme und Berechnen der Abstände $g_1 \dots g_5$ erhält man die Punkte der Horizontalprojektion z. B. in folgender Ordnung: B_1; C_2, B_2; C_3, D_3, B_3; C_4, D_4, E_4, B_4; B_5; A_5, A_4, A_3, A_2, A_1. Die Vertikalprojektionen können bei der Anwendung ausgelassen werden. 2

University of Illinois, Urbana, Ill., U. S. A.
Juni 1929. H. M. Westergaard.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

LUTHER PFAHLER **EISENHART**, Professor of Mathematics in Princeton University. Non-Riemannian Geometry. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume VIII. New York 1927. VIII + 184 S.

Es wird die Theorie des affinen Zusammenhanges und die daran anschließende projektive Geometrie der Räume mit affinem Zusammenhang dargestellt. Es ist im wesentlichen das Gebiet, dem der Riccikalkül von J. A. Scouton gewidmet ist; eine kürzlich erschienene Differentialgeometrie von E. Cartan befaßt sich mit ähnlichen Fragen.

In der Riemannschen Geometrie geht man von einer quadratischen Form bzw. einem symmetrischen Tensor zweiter Stufe aus, mit dessen Hilfe man alsbald einen invarianten linearen Differentiationsprozeß ableitet. In der Nicht-Riemannschen Geometrie erklärt man den linearen Differentiationsprozeß direkt. Es läßt sich dann aus demselben der Parallelismus von Vektoren längs einer Kurve erklären, und die Differentialgleichung der geodätischen Linien gewinnen, deren Tangenten zueinander parallel sind — alles ganz analog zur Riemannschen Geometrie.

In der projektiven Geometrie dieser Räume betrachtet man die Gesamtheit der affinen Zusammenhänge, die zu denselben geodätischen Linien gehören.

Kap. I u. II behandelt den affinen Zusammenhang. Kap. III die projektive Geometrie und Kap. IV die Geometrie in Unterräumen. Die Darstellung dieser ganz neuen und für die neuere Relativitätstheorie wichtigen Differentialgeometrie ist ebenso interessant wie durchsichtig und formal befriedigend.

Königsberg. K. Reidemeister.

ERIC T. **BELL**, Professor of Mathematics California Institute of Technology. Algebraic Arithmetic. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume VII. American Mathematical Society, New York 1927. IV + 180 S. Preis \$ 2,—.

Nach Darlegung des Begriffes einer algebraischen Arithmetik wird im wesentlichen eine solche abstrakte Algebra entwickelt, die sich zur Ableitung arithmetischer Sätze über einfach und mehrfach periodische Funktionen, Thetafunktionen u. ä. verwenden läßt. Die Natur des Themas bringt es mit sich, daß die Darstellung vielfach den Charakter eines Referates trägt und oft auf die ausgedehnte Literatur — sei es das abstrakte Formale, sei es das Anwendungsgebiet betreffend — verwiesen wird.

Königsberg. K. Reidemeister.

Prof. Dr. P. V. **NEUGEBAUER**, Observator am astronomischen Recheninstitut in Berlin-Dahlem. Astronomische Chronologie. Erster Band: Text XII + 190 S. Zweiter Band: Tafeln. 36 S. Verlag Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig 1929. Preis geb. 40 M.

»Das Handbuch der Astronomischen Chronologie wendet sich in erster Linie an Historiker und Orientalisten. Es stellt sich die Aufgabe, alle modernen Hilfsmittel zur Berechnung von Himmelserscheinungen lückenlos nachzuweisen und ihren Gebrauch in so elementarer Form zu erläutern, daß der Nichtastronom auf die bisher in vielen Fällen immer noch erforderliche Hilfe eines Fachmannes vollständig verzichten kann.« (Vorwort.) Diese Aufgabe hat der Verf. in ausgezeichneter Weise gelöst. In einem kurzen theoretischen Teil (31 S.) bringt er aus der Astronomie alles das, was der Historiker bei Anwendung der Tafeln explizit wissen sollte, nicht mehr, und auch hierbei wird der kurzen, leicht anschaulichen, aber vielleicht nicht ganz strengen Form immer der Vorzug gegeben.

Der praktische Teil (154 S.) ist wirklich absolut vollständig. Es gibt keine Aufgabe, die dem Historiker je entgegengetreten wäre oder entgegentritt, die hier nicht Erläuterung und Lösung fände. Darunter auch die Phänomene, die in neuerer Zeit für die Festlegung historischer Daten der assyrisch-babylonischen Geschichte wichtig zu werden beginnen, wie Sternbedeckungen durch den Mond, Konjunktionen des Mondes und der Planeten, Neulicht des Mondes. Den breitesten Raum nehmen die Finsternisse ein (40 S., 70 S. Tafeln); natürlich; nicht nur, daß sie die langwierigste Rechnung erfordern, es liegen zu ihrer Bearbeitung auch die meisten numerischen Hilfsmittel vor, zu denen der Abschnitt den besten Wegweiser bildet. Ein näheres Eingehen auf das

inhaltreiche Buch verbietet sich hier. Nur das sei gesagt, daß es gut, lebendig geschrieben ist, daß es interessante Fälle als Beispiele wählt und daß es sein Ziel erreicht, d. i., den Historiker in den Stand setzt, alle Aufgaben der astronomischen Chronologie ohne Ausnahme selbständig zu behandeln.

Der II. Band enthält Tafeln, die sich in Druck und Anlage an die früheren drei Bände der »Tafeln zur astronomischen Chronologie« des Verf. anschließen (erschienen 1912, 1914, 1922, Anhang 1925). Diese vier Tafelbände seien der besonders genauen Durchsicht eines jeden Interessenten empfohlen; schon deshalb, um sich zu überzeugen, daß in der Tat alle Möglichkeiten des Geschehens am Sternenhimmel in der reichen und umsichtig angeordneten Tafelsammlung Berücksichtigung finden. Nicht zuletzt auch hat es einen eigenen Reiz zu sehen, wie hier von erfahrener und gewandter Hand recht schwierige, jedenfalls recht umständliche Tabulierungsprobleme einfach und bequem gelöst sind.

Kiel, August 1929. C. Wirtz. 15

LEON **LICHTENSTEIN,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Grundlagen der Hydromechanik. Mit 54 Textfiguren. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. XXX. Verlag Springer, Berlin 1929. XVI + 506 S.

Wer dies umfangreiche Buch zur Hand nimmt, wird vor allem überrascht sein darüber, wieviel Wissenswertes sich zur Hydromechanik sagen läßt, wenn man auch von fast allem absieht, was sonst den Inhalt hydrodynamischer Lehrbücher auszumachen pflegt. Für den Verfasser ist Hydromechanik gleichbedeutend mit Untersuchung der Folgerungen aus den Eulerschen Differentialgleichungen für inkompressible Flüssigkeiten (der Ansatz für zähe Flüssigkeiten sowie der Fall der Kompressibilität werden nur beiläufig gestreift). Erscheinungen, die mit der Theorie in Widerspruch stehen oder sich bisher aus ihr nicht haben ableiten lassen, werden in keiner Weise erwähnt. Das Kennzeichnende aber gegenüber anderen theoretischen Darstellungen, etwa der von Lamb oder W. Wien, ist, daß auch kaum irgendwelche spezielle Integrale der Bewegungsgleichungen zur Behandlung kommen. Man würde also beispielsweise ein Wort über die Anwendung der konformen Abbildung auf Strömungsprobleme nach der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode vergebens suchen.

Was ist nun eigentlich der Inhalt der 500 Seiten des Buches? Zunächst sind rund 100 Seiten vorbereitender Untersuchungen aus der Analysis, der Vektor-Geometrie und der Potentialtheorie gewidmet, die als Einleitung in eine allgemeine Mechanik der Kontinua gelten könnten. Die Exaktheit aber und Vollständigkeit der Darstellung und der Ausdrucksweise in diesen wie den folgenden Kapiteln übertrifft bei weitem das, was man in durchschnittlichen Lehrbüchern selbst der reinen Mathematik zu finden pflegt. In keinem Augenblick wird vergessen, zwischen einem Gebiet T, seinem Rand S und dem Bereich $T+S$ genau zu unterscheiden, und vor der Möglichkeit, einmal eine stetig gekrümmte Begrenzungsfläche mit einer solchen zu verwechseln, die nur eine stetige und der »Hölderschen Bedingung« genügende Normalen-Richtung besitzt, wird dem Leser ein wahrer Schauder eingeflößt.

Nach einem kurzen Abschnitt über allgemeine Mechanik behandelt der Verf. sehr ausführlich die bekannten Beziehungen aus der Kinematik der Kontinua. Besonderen Nachdruck legt er z. B. auf eine sorgfältige Durchführung des Uebergangs zwischen den Eulerschen Variablen (Geschwindigkeit als Funktion von Zeit und Ort) und den Lagrangeschen (Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens als Funktion der Zeit und des Teilchens). Der kinematischen Betrachtung der Fortpflanzung von Unstetigkeiten ist ein eigenes Kapitel gewidmet. Dann erst, in der zweiten Hälfte des Buches gelangt man zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen auf Grund der Erfahrungstatsachen der Hydromechanik. Im achten Kapitel behandelt der Verf. Fragen der Hydrostatik und dringt hier eigentlich am weitesten zu konkreten Problemen vor, indem beispielsweise das Archimedische Prinzip aus den allgemeinen Ansätzen hergeleitet und sogar etwas über die Gleichgewichtsfiguren rotierender, der Schwere unterworfener Flüssigkeiten gesagt wird.

Die drei letzten Kapitel erst, die überschrieben sind: Hamiltonsches Prinzip, Transformation der Bewegungsgleichungen und Existenzsätze enthalten Ausführungen über hydrodynamische Fragen im engeren Sinne. Hier wird auch stellenweise die Voraussetzung der Inkompressibilität fallengelassen, so daß sich Gelegenheit ergibt, die interessante Friedmannsche[1]) Erweiterung der Helmholtzschen Wirbeltheorie darzustellen. Etwas störend wirkt dabei, daß der Verf. die langwierigsten Koordinatenformeln der einfachen und übersichtlichen Vektor-Schreibweise vorzieht. In dem Abschnitt über Existenzsätze gibt er im wesentlichen die Ergebnisse eigener Untersuchungen wieder, über die hier schon einmal ganz kurz berichtet wurde[2]). Wenn auch kaum die Fragen Beantwortung finden, die der Hydromechaniker gern beantwortet sehen würde, ist doch die Kenntnis alles dessen, was die heutige Mathematik hier leisten kann, äußerst wichtig und es würde sich lohnen, diesen Ergebnissen einmal eine Darstellung zu geben, die von entbehrlichen mathematischen Finessen frei ist.

Wenn der Verf. gelegentlich Bemerkungen für den »vorwiegend physikalisch interessierten Leser« einstreut, so irrt er sich wohl in der

---

[1]) Vergl. diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 102 bis 107.

[2]) Vergl. diese Zeitschr. Bd 7 (1927), S. 408 bis 409.

Beurteilung seines Leserkreises. Das Buch ist so geschrieben, daß es nur von einem in der Denkweise der modernen Analysis geschulten und mit allen Feinheiten der exaktesten Bezeichnungsweise wohl vertrauten Mathematiker gelesen werden kann. Dies ist gewiß kein Tadel; denn jede Auffassung eines Gegenstandes, wenn sie nur in sich folgerichtig durchgeführt ist, hat ihre Berechtigung und jedes Niveau der Darstellung, das sich aus der einmal gestellten Aufgabe ergibt, kann am Platz sein. Nur in einem Punkte möchte der Referent etwas Einspruch erheben. Sooft von den mechanisch-physikalischen Grundlagen die Rede ist, betont der Verf. nicht ohne einen gewissen Stolz, daß er in diesen Dingen nicht über die Auffassung von Kirchhoff hinausgeht. Wenn dies auch bei der inhaltlichen Abgrenzung des Buches kaum praktische Folgen hat, so wird doch der Anschein erweckt, als würde hier ein Gegenstück zu den bekannten, recht unliebsamen Erscheinungen der technischen Literatur geschaffen, in denen Autoren bei Behandlung der schwierigsten physikalischen und technischen Fragen sich etwas darauf zugute tun, mit veralteten und daher unzulänglichen mathematischen Hilfsmitteln zu arbeiten. Jedenfalls liegt die Bedeutung des Lichtensteinschen Werkes, die wir gern anerkennen, nicht darin, daß es in der Mechanik bei 1870 stehengeblieben ist, sondern darin, daß es die Mathematik von 1930 zur Geltung bringt.

Mises. 33

HARRY **SCHMIDT**, Professor an der Gewerbeschule Köthen, Privatdozent an der Universität Leipzig. Aerodynamik des Fluges. Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie. Mit 81 Fig. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1929. VI + 258 S. Preis geh. 15 M, geb. 16,50 M.

Das schöne, in den letzten Jahren von verschiedenen Forschern erschlossene Anwendungsgebiet der Theorie idealer Flüssigkeiten, das die Fragen der Auftriebs- und Widerstandsberechnung von Flugzeugtragflügeln umfaßt, hat schon verschiedene lehrbuchmäßige Darstellungen gefunden. Hier liegt eine besonders eingehende und sorgfältig durchgeführte vor, die nach Form und Inhalt sich ausgezeichnet als einführendes Lehrbuch für Studierende empfiehlt. Es wird zunächst eine kurze und sachgemäße Ableitung der Grundgleichungen der Hydromechanik und eine Zusammenstellung der wichtigsten funktionentheoretischen Hilfsmittel gegeben. All dies ist so geschrieben, daß ein Leser, der die allgemeinen mathematischen Einführungsvorlesungen gehört hat, gut folgen kann. Das vierte Kapitel des Buches gibt die allgemeine Theorie des Auftriebes unendlich breiter Tragflächen und das fünfte spezielle Ausführungen hierzu, alles in engem Anschluß an die Original-Literatur, aber unter sorgfältiger Verarbeitung des Stoffes. Das sechste Kapitel bringt einiges aus der Lehre von der räumlichen Bewegung als Vorbereitung auf die im letzten Kapitel behandelte Prandtlsche Berechnung des Auftriebs und Widerstands endlich ausgedehnter Tragflügel. Der sorgfältigen Arbeit des Verf. ist der beste Erfolg zu wünschen.

Mises. 33

HERMANN **OBERTH**, Wege zur Raumschiffahrt. Mit 4 Tafeln und 159 Abb. 3. Auflage von »Die Rakete zu den Planetenräumen«. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1929. XI + 431 S. Preis 20 M.

Das Buch, das den Schöpfern eines bekannten Sensations-Films gewidmet ist, verdient ernsthafte Beachtung, wenn auch nicht alles was darin »berechnet« wird, ernsthafter Kritik standhält. Die mechanischen Grundlagen des Raketenproblems sind so einfach und durchsichtig, daß hierzu nicht viel neues gesagt werden kann. Jedenfalls ist die Einführung eines neuen recht unklaren Begriffs, des »Andrucks«, dessen der Verf. zur Darstellung der dynamischen Verhältnisse zu bedürfen meint, ganz überflüssig.

Die wirklichen Schwierigkeiten der Raumschiffahrt, d. h. des Aufsteigens in weit von der Erdoberfläche entfernte Räume, liegen auf technischem und, soweit auch an den Aufstieg von Lebewesen gedacht wird, auf physiologischem Gebiet. Es ist sehr leicht zu sagen, daß man, um eine Landung durchzuführen, bloß Rückstoß nach oben zu geben oder in irgendeiner Weise fallschirmartige Wirkungen auszulösen braucht; auch einige hierfür maßgebende Größenbeziehungen lassen sich unschwer berechnen. Wer aber weiß, welche mühsame, über Jahrzehnte sich hinstreckende Arbeit die kleinste Verbesserung der Landungsmöglichkeiten der Flugzeuge erfordert, der kann solchen allgemeinen Angaben überhaupt keine Bedeutung beimessen. Wenn erst einmal die allerprimitivsten technischen Vorfragen gelöst sind und kleine Modellraketen ein paar hundert Meter aufsteigen, dann wird ganz von selbst das phantastische Stadium der Entwicklung zu Ende gehen und alle Erörterungen über »Stationen im Weltenraum« und über »Reisen auf fremde Weltkörper«, die einen erheblichen Teil auch des vorliegenden Buches füllen, werden für lange Zeit, wenn nicht für immer, verstummen. Auch auf Flugzeugflügeln dachte man einmal, der Sonne nahekommen zu können, aber als man sich im modernen Flugzeug in 100 m Höhe einigermaßen sicher fühlte, war jener Traum schon lange vorüber. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, daß man nicht mit Hilfe des Raketenprinzips gewisse Aufstiegleistungen wird erzielen können, die dem auf dem Drachenprinzip beruhenden Flugzeug versagt sind. Und darum ist es ein nützliches Beginnen, daß durch Bücher wie das vorliegende die Aufmerksamkeit auf die Beschäftigung mit dem Raketenproblem gelenkt wird, wenn dies hier auch in einer Weise geschieht, die mindestens ebenso stark an das Sensationsbedürfnis wie an den wissenschaftlichen Forschungstrieb appelliert.

Mises. 33

H. **GLAUERT,** M. A. Fellow of Trinity College Cambridge. Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Uebersetzt von Dipl.-Ing. H. Holl. Mit 115 Textabbildungen. Verlag Springer, Berlin 1929. 202 S. Preis 12,75 M, geb. 13,75 M.

Es ist zu begrüßen, daß jetzt auch eine deutsche Ausgabe des im Vorjahre hier angezeigten Werkes, das eine gute Einführung in die Tragflächentheorie bildet, erschienen ist. Die Uebersetzung scheint, soweit die Durchsicht lehrt, einwandsfrei zu sein. Mises.

Preußische Staatsbibliothek. Handbibliothek des Großen Lesesaals. Abteilung 7. Mathematik und Naturwissenschaften. Berlin Staatsbibliothek 1929.

Der schön ausgestattete Katalog zeigt, daß die Auswahl der im Lesesaal der Staatsbibliothek aufgestellten Bücher aus den uns interessierenden Gebieten von einer geschickten und sachverständigen Stelle aus geleitet wurde. Mises.

EMIL **HATSCHEK,** Fellow of the Institute of Physics; Lektor der Kolloidchemie am Sir John Cass Technical Institute London. Die Viskosität der Flüssigkeiten. Mit 88 Figuren und 30 Tabellen im Text. Verlag Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1929. XII + 225 S. Preis geh. 13,50 M, geb. 15 M.

Das inhaltsreiche Buch stellt in ausführlicher Weise alle erfahrungsmäßigen Kenntnisse über die Größe der Zähigkeitszahlen verschiedener Flüssigkeiten zusammen. Die Theorie der Zähigkeitsbestimmung wird nicht sehr vollständig behandelt, doch sind die wichtigsten Apparate und Verfahren angegeben. Den hauptsächlichsten Inhalt bilden die Mitteilungen über die Abhängigkeit der Zähigkeit von Temperatur und Druck und über die Verhältnisse bei Flüssigkeitsgemischen, kolloidalen Lösungen usw. Es wäre vielleicht erwünscht gewesen, in der deutschen Bearbeitung etwas mehr auf die in Deutschland üblichen Meßverfahren einzugehen, doch wird das Buch in jedem Fall allen an der Hydromechanik Interessierten wertvolle Dienste leisten. Mises.

Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart. Zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts 1829—1929. Berlin 1929, Verlag von Julius Springer. 475 S. Preis geb. 24 M.

Aus Anlaß ihrer Jahrhundertfeier läßt die Hochschule einen von ihrem Rektor, Prof. Grammel redigierten, schön ausgestatteten Band erscheinen, der zahlreiche wertvolle Aufsätze, darunter auch solche, die in unsern Aufgabenkreis fallen, enthält. Man muß es ja im allgemeinen bedauern, daß durch derartige, aus äußeren Anlässen entstandene Sammelwerke eine für den Interessenten sehr unbequeme Zersplitterung der Literatur eintritt. Die Erfüllung eines repräsentativen Zweckes kann man nur zum Teil als Entschuldigung gelten lassen. Von den für uns in Betracht kommenden Arbeiten seien genannt: E. Braun, Ueber die Stabilität der Schwingungen in einer Turbinenanlage mit offenen Werkleitungen; G. Doetsch, Ueber elektrische Kabelschwingungen; R. Grammel, Ueber Schwungräder mit radial beweglichen Massen; R. Mehmke, Beiträge zum graphischen Rechnen mit komplexen Zahlen; R. Woernle, Beitrag zur Klärung der Drahtseilfrage. Mises.

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. JOHANN **NIKURADSE,** Tiflis, Georgien. Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. 28 Abb., 14 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingedieurwesens. Herausgegeben vom V. D. I. Heft 289. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1929. 49 S. Preis 6 M.

Professor Dr. MAX **WOLFF,** Zwangswirtschaft und Wohnungswesen. 1. bis 15. Tausend. Widder-Verlag, Berlin 1929. 72 S. Preis 0,80 M.

Dr. phil. O. **TIETJENS,** Mitarbeiter am Forschungsinstitut der Westinghouse Electric et Manufacturing Co., Pittsburgh, Pa., U. S. A. Hydro- und Aeromechanik, nach Vorlesungen von L. Prandtl. Mit einem Geleitwort von Professor Dr. L. **PRANDTL,** Direktor des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung in Göttingen. Erster Band: Gleichgewicht und reibungslose Bewegung. Mit 178 Textabbildungen. Verlag Springer, Berlin 1929. VIII + 238 S. Preis geb. 15 M.

Prof. Dr. F. **AUERBACH** und Prof. Dr. W. **HORT,** Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Bd. I: Technische und physikalische Mechanik starrer Systeme. Erster Teil, Lieferung 3. Mit 100 Abb. im Text. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1929. S. 695—786. Preis brosch. 12.50 M.

OTTO **HAUPT,** o. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. Einführung in die Algebra. Erster Band. XV + 367 S. Preis br. 24 M, geb. 26 M. — Zweiter Band. Mit einem Anhang von W. Krull. 1 Figur. XV + 369 bis 663 S. Preis br. 20 M, geb. 21,50 M. — Band V von: Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, herausgegeben von E. Hilb, o. Professor an der Universität Würzburg. Akademische Verlagsges., Leipzig 1929.

Dr.-Ing. K. **HAJNAL-KONYI,** Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken bei zentralsymmetrischer Belastung. Mit 26 Abb. im Text. Verlag Springer, Berlin 1929. VI + 133 S. Preis 12 M.

D. **THOMA,** Dr.-Ing., o. Professor. Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. Heft 3 mit 233 Abb. Verlag Oldenbourg, München und Berlin 1929. 163 S. Preis geh. 12 M.

Ing. Dr. Techn. GÜNTHER **OBERDORFER,** Privatdozent der Techn. Hochschule in Wien. Das Rechnen mit symmetrischen Komponenten. Ein Lehrbuch für Elektroingenieure und Elektrotechniker. Mit 40 Abb. im Text. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. Sammlung Mathematisch-Physikalischer Lehrbücher. Bd. 26. V + 74 S. Preis kart. 5 M.

Dr. LOTHAR **SCHRUTKA,** Edler von Rechtenstamm, o. ö. Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule in Wien. Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. Zweite Auflage. Photomechanischer Druck der ersten Auflage mit Nachträgen. Verlag Deuticke, Leipzig und Wien 1929. XII + 103 S.

Dr. J. **HORN,** o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Partielle Differentialgleichungen. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe, Bd. 14. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1929. VII + 228 S. Preis 11 M, geb. 12 M.

Prof. Dr. OTTO **SPIESS,** Leonhard Euler, ein Beitrag zur Geistesgeschichte des 18. Jahrhunderts. Verlag Huber & Co., Frauenfeld-Leipzig 1929. 228 S.

OSKAR **ANDERSON,** Professor an der Handelshochschule in Varna. Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung. Ein Beitrag zur Analyse von Zeitreihen. Veröffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung, Heft 4. Verlag Kurt Schroeder, Bonn 1929. 141 S. 8 M.

LUDWIG **FÖPPL,** o. Professor a. d. Techn. Hochschule München. Mechanik. 2. Teil: Technische Mechanik. Mit 117 Abb. Handbuch d. Experimentalphysik. Herausgegeben von W. Wien und F. Harms. Bd. 3. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1929. X + 189 S. Preis geh. 18,30 M, geb. 19,75 M.

ADOLF **HURWITZ,** weil. ord. Prof. der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über Geometrische Funktionentheorie von R. Courant, ord. Prof. der Mathematik an der Universität Göttingen. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 152 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band III. Verlag Springer, Berlin 1929. XII + 534 S. Preis 33 M, geb. 34,80 M.

Hofrat Ing. A **MORPURGO,** Graz. Die wiederholte Einzelausgleichung. Mit 3 Figuren im Text und 4 Tabellenbeilagen. Als Manuskript gedruckt. Teubners techn. Leitfäden Bd. 26. Verlag Teubner, Leipzig und Berlin 1930. 45 S. Kart. 30 M.

ALFRED **MANES,** Versicherungswesen. System der Versicherungswirtschaft. Fünfte völlig veränderte und erweiterte Auflage in drei Bänden mit Einschluß der Sozialversicherung. Erster Band: Allgemeine Versicherungslehre. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930. XII + 436 S. Preis 28 M.

NACHRICHTEN

Franz Reuleaux. In diesen Tagen wurde die hundertste Wiederkehr des Geburtstages von Franz Reuleaux (30. September 1829) vielfach festlich gefeiert. Reuleaux war ein Schüler des Oesterreichers Redtenbacher, der sich in der Maschinenlehre an französische Vorbilder angeschlossen und in manchen theoretischen Ansätzen selbständig versucht hatte. Die sprunghaft rasche Entwicklung des deutschen Maschinenbaues in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts führte Reuleaux zu einer starken Vergröberung der Maschinenwissenschaft, die in seiner 1854 erschienenen »Konstruktionslehre für den Maschinenbau« und dem in vielen Auflagen veröffentlichten »Konstrukteur« zum Ausdruck kam. Mit diesen Werken, die fast einem maschinentechnischen Rezeptbuch gleichen, und mit seiner sonstigen ausgebreiteten publizistischen Wirksamkeit beherrschte Reuleaux lange Zeit hindurch den deutschen Maschinenbau. Erst in den letzten Jahrzehnten des Jahrhunderts drangen die wissenschaftlich vertieften Methoden wieder durch, die sich in erster Linie auf die Ergebnisse der Festigkeitslehre stützten und rasch der Periode des Reuleauxschen »Konstrukteurs« ein Ende machten.

Gleichwohl wird der Name Reuleaux in der Geschichte der Maschinenlehre unauslöschlich bleiben als der des Schöpfers einer durchaus originellen und in ihren Grundzügen vollkommenen Maschinen-Systematik. Sein Lehrbuch der Kinematik, dessen erster Band 1875 erschien und kaum beachtet wurde, enthält die auf dem Begriff des Elementenpaars aufgebaute Definition der kinematischen Kette, des Mechanismus und der Maschine, mit denen es möglich wird, jede mechanische Einrichtung, soweit sie die Realisierung eines bestimmten Bewegungsablaufs erreichen soll, theoretisch zu erfassen. Man bezeichnet diesen von Reuleaux geschaffenen Teil der Maschinen-Wissenschaft heute zweckmäßig als Zwanglauflehre. Sie bedient sich der Ergebnisse der sonst als Kinematik bezeichneten geometrischen Disziplin, der sie eine Fülle neuer Aufgaben gestellt hat, als ihres wichtigsten Hilfsmittels. Erst in der neuesten Zeit hat man erkannt, welche Bedeutung der Zwanglauflehre auch für die Praxis zukommt. Ihre volle Auswertung wird jedoch die Reuleauxsche Schöpfung erst erfahren, wenn man sie in Zusammenhang mit der Kinetik der mechanischen Systeme, wie sie die Lagrangesche Mechanik in größter Allgemeinheit liefert, gebracht haben wird.

Mises. 36

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 22. November sprach im Institut für angewandte Mathematik der Universität Hr. Prvdzt. Dr. F. Ollendorf-Berlin »Ueber die Behandlung von elektrischen Schaltvorgängen mittels der Heavisideschen Operatorenrechnung«.

Am 20. Dezember werden die Herren Prof. Dr. A. Korn-Berlin über »Weiterführung der Riemannschen Methode zur Lösung der Wellengleichung« und Prof. Dr. H. Reißner-Berlin über »Schwingungen mit Hysteresis« vortragen.

Prager Mitglieder.

Am 14. November sprach Herr Dr. Fröhlich-Prag über »Abbildung der Punkte des dreidimensionalen Raumes auf monofocale Kegelschnitte der Ebene«.

Am 12. Dezember hielt Herr Ing. F. Lindner-Prag einen Vortrag über »Beitrag zur Widerstandstheorie strömender Flüssigkeiten«.

Dritter Internationaler Kongreß für Technische Mechanik in Stockholm. In der Zeit vom 24. bis 29. August 1930 wird in Stockholm der dritte Internationale Mechanik-Kongreß stattfinden, veranstaltet von dem Internationalen Komitee, das 1924 in Delft und 1926 in Zürich die beiden ersten Kongresse ins Werk gesetzt hat. Von dem Organisationskomitee in Stockholm werden als bevorzugte Verhandlungsgegenstände die folgenden angegeben:

1. Innerhalb der Hydro- und Aerodynamik: Propellertheorie und Widerstandsproblem.
2. Innerhalb der Elastizitäts- und Festigkeitslehre: Stabilität dünnwandiger Konstruktionen, Bruchgrenze und Plastizitätstheorie.
3. Innerhalb der allgemeinen Mechanik: Schwingungen auf Schiffen und Fahrzeugen sowie Raumakustik und damit verwandte Fragen.

Voranmeldungen werden bis zum 1. März 1930, Anmeldungen zur Teilnahme bis zum 1. April an den Generalsekretär Professor Dr. Weibull, Kgl. Technische Hochschule Stockholm, erbeten.

In Zusammenhang mit der Internationalen Industrieausstellung, die 1930 in Lüttich stattfindet, wird ein »Congrès de Mécanique générale« angekündigt, der sich vorzugsweise mit Fragen aus dem Maschinen- und Lokomotivbau beschäftigen wird. Die Veranstaltung dieses Kongresses steht in keinerlei Beziehung zu dem Internationalen Komitee der Kongresse in Delft, Zürich und Stockholm. 36

Göttinger mathematisches Institut. Am 2. Dezember wurde in Göttingen das mit Unterstützung von Rockefeller neu errichtete mathematische Universitäts-Institut eingeweiht, das unter Leitung der Direktoren Courant, Herglotz, Hilbert und Landau steht. Damit hat das von Felix Klein geschaffene Institut für angewandte Mathematik, das 1904—1924 von Runge geleitet wurde, endgültig zu bestehen aufgehört, nachdem schon beim Abgang Runges die Professur für angewandte Mathematik als solche nicht mehr besetzt worden ist. Wenn auch in feierlichen Reden stets betont wird, daß man die Pflege der angewandten Mathematik nicht aus den Augen verlieren will, liegt hier doch eine bedauerliche rückläufige Entwicklung vor. 36

„Technische Mechanik und Thermodynamik". Dem letzten Heft war ein Rundschreiben des VDI-Verlags beigelegt, in dem das Erscheinen einer neuen Monatsschrift unter dem Titel „Technische Mechanik und Thermodynamik" angekündigt wird. Der Herausgeber legt Wert darauf festzustellen, daß die Beilegung ohne sein Vorwissen erfolgt ist und daß er mit der in dem Rundschreiben gegebenen Abgrenzung zwischen dem Aufgabenkreis der neuen Monatsschrift und dem der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" nicht einverstanden ist.

Persönliches. Herr Prof. Dr. G. Madelung von der Technischen Hochschule Charlottenburg, Vorstandsmitglied der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., hat einen Ruf als o. Professor für Flugwesen an die Technische Hochschule Stuttgart angenommen.

Herr Prof. Dr. K. Löwner von der Universität Köln hat einen Ruf als Professor der Mathematik an die Deutsche Universität in Prag (Nachfolge von Pick) erhalten.

Herr Prof. Dr. K. W. Wagner, Direktor des Instituts für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule Charlottenburg ist durch Verleihung der Heinrich-Hertz-Medaille ausgezeichnet worden.

Dem o. Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Wien, Herrn Dr. Th. Schmid, wurde aus Anlaß seines Rücktritts vom Lehramt das Ehrenzeichen der Republik Oesterreich verliehen.

Im 59. Lebensjahr verstarb in Hamburg Herr Dr. Max Oertz, der sich durch seine bekannten Bootskonstruktionen, durch das stark verbreitete Oertz-Ruder, sowie durch wertvolle Arbeiten auf dem Gebiete der Strömungslehre verdient gemacht hat. 36

(Redaktionsschluß 12. Dezember 1929.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 9 :: Dezember 1929

:: Heft 6 :: Seite 433 bis 520

Mit den Vorträgen der Prager Versammlung

INHALT:

HAUPTAUFSÄTZE:

ÉLIÁS, Die Wärmeübertragung einer geheizten Platte an strömende Luft / HUBER, Versuche zur Ermittlung der Vertikalspannungen beim Walzvorgang / SPANNHAKE und BARTH, Potentialströmung durch ruhende oder bewegte Schaufelgitter mit Schaufeln von beliebiger Form

Vorträge der Prager Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Alle Zuschriften, die den wissenschaftlichen Inhalt der Zeitschrift betreffen, sind an den Herausgeber, Professor Dr. v. Mises, Berlin NW 23, Siegmundshof 9, alle übrigen Zuschriften an den Verlag zu richten.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

VOLS I-XIX

1921-39

10/10